Lycée Remada Tataouine — Professeur : M^r Hamdi

Année Scolaire : 2016 – 2017 — Classe : 3 ème Technique

Série N°2

Mathématiques

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte, mettre une croix dans la bonne case.

Questions	Réponses
1. La forme cartésienne du nombre complexe $(1+i)^2$ est égale à	❒ 2 ❒ $2\,i$ ❒ $-2\,i$
2. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, on pose $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ $w \in i\,\mathbb{R}$ si et seulement si	❒ $\lvert z\rvert = 1$ ❒ $z \in \mathbb{R}$ ❒ $z \in i\,\mathbb{R}$
3. Si $u = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^4$ alors	❒ $\bar{u} = -1$ ❒ $\bar{u} = i$ ❒ $\bar{u} = -i$
4. Le module du nombre complexe $(\sqrt{2} - i\,\sqrt{6})^3$ est égal à	❒ $8\sqrt{2}$ ❒ $16\sqrt{3}$ ❒ $8\sqrt{8}$
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert^3}{\lvert x^2-1\rvert + 2}$	❒ f est impaire ❒ f est paire ❒ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
6. Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{8\,x+3}{2\,x+6}$ On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. $\mathscr{C}_f$ admet pour centre de symétrie le point	❒ $I_1(3,4)$ ❒ $I_2(-3,4)$ ❒ $I_3(4,-3)$
7. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthogonal et soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^2 + \sqrt{8}\,x + 8$ $\mathscr{C}_f$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation	❒ $x = -2$ ❒ $x = -\sqrt{2}$ ❒ $x = \sqrt{2}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 2$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

2/ a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier la nature des branches infinis à $\mathscr{C}_f$.

3/ a) Ecrire l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) + 3\,(x-1) = (x-1)^3$.

c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T.

4/ a) Montrer que le point $I(1, 0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) Tracer $\mathscr{C}_f$ et T.

c) Tracer la courbe représentative de la fonction $|f|$.

5/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f^3(x) + 3\,f(x) - 10$

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'on a : $g'(x) = 3\,f'(x)\,(1 + f^2(x))$.

b) Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 3

On considère deux réels a et b, déterminer a et b sachant que :

1/ $2\,(i - a) - 5 = 3 + 2\,i\,b$

2/ $3 + 2\,i = a\,(3 + 4\,i\,b)$

3/ $-3 + i\,a = 2\,i + \,(1 - i\,b)^2$

Exercice 4

Soit M un point d'affixe un nombre complexe z.

Dans chaque cas, déterminer puis construire l'ensemble des points M tels que :

1/ $|z - 3\,i + 1| = 5$

2/ $|z - 3\,i| = |z + 3\,i|$

3/ $|i\bar{z} - 2| = 5$

4/ $|z - 2\,i + 3| < 3$

5/ $arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + \,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

6/ $arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

7/ $arg(z - 2\,i) = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

8/ $arg(\bar{z} + 2\,i) = \dfrac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les nombres complexes : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1/ Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

2/ a) Ecrire z_1 et z_2 sous leurs formes trigonométriques.

b) Montrer que : $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) En déduire les valeurs exactes de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 6

Soit z un nombre complexe différent de -1, on pose : $w = \dfrac{z - i}{z + 1}$

On note $z = x + i\,y$ et $w = x' + i\,y'$ avec $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$.

1/ Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

2/ Déterminer puis construire chacun des ensembles suivants :

a) $E_1 = \{M(z)\,; w \in \mathbb{R}\}$

b) $E_2 = \{M(z)\,; w \in i\,\mathbb{R}\}$

c) $E_3 = \{M(z)\,; |w| = 2\}$

3/ On désigne par A le point d'affixe -1 et par B le point d'affixe i.

Caractériser puis construire l'ensemble : $E = \{M(z)\,; arg(w) = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{4\,x^2 - 8\,x + 1}{x - 2}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Etudier la limite de f en 2 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2/ Dresser le tableau de variation de f.

3/ Montrer que le point $I(2, 0)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4/ a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq 2$, on ait :

$$f(x) = a\,x + b + \frac{c}{x - 2}$$

b) En déduire que la droite $\mathscr{D} : y = 4\,x$ est un asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.

c) Tracer $\mathscr{C}_f$.

5/ Etudier graphiquement et suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 8

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+3\,u_n}, \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2/ On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{3\,u_n - 2}{3\,u_n + 3}$$

a) Calculer v_0 et v_1.

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

2/ a) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un tétraèdre, on désigne par I, J, K, L M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[AC]$, $[BD]$, $[AD]$ et $[BC]$.

1/ Montrer que le quadrilatère $INJM$ est un parallélogramme.

2/ On désigne par O le centre du parallélogramme $INJM$, montrer que :

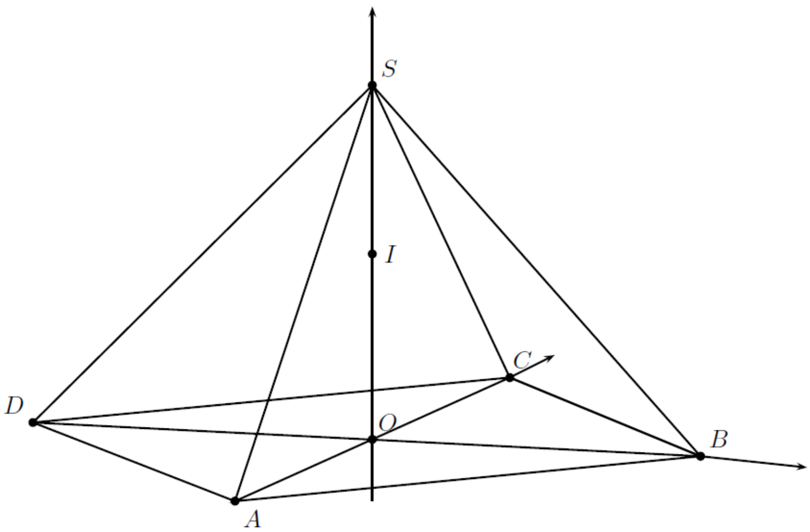
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$

3/ Montrer que $O \in (LK)$.

4/ On désigne par G le centre de gravité du triangle BDC, montrer que la droite (GA) passe par O.

Exercice 10

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.

On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1/ Justifier que le repère $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

2/ On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu de $[SO]$.

a) Déterminer les coordonnées du point K.

b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).

Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d) Déterminer les coordonnées du point L.

3/ On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.

a) Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

c) Montrer que les plans (BCI) et (SAD) sont perpendiculaires.