

MINISTERE DE L'EDUCATION

DIRECTION REGIONALE DE JENDOUBA

Année scolaire : 2016-2017

Lycée Pilote de Jendouba

DEVOIR DE CONTROLE N 1

2ème Trimestre

MATHEMATIQUE

Classes: 4 Sciences expérimentales

Durée de l'épreuve: 2 heures

. Les calculatrices scientifiques sont autorisées

. Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 1:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(0, 0, 2)$; $B(1, 0, 0)$ et $C(0, -1, 0)$ et $I(1, 1, 1)$

- 1) a) Montrer que les points A , B et C déterminent un plan P .
- b) Montrer qu'une équation de P est $-2x + 2y - z + 2 = 0$
- c) Calculer $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}$. En déduire que $I \notin P$
- d) Calculer le volume du tétraèdre $ABCI$. Déduire alors la distance du point I au plan P .

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$$

- a) Montrer que S est une sphère ; préciser son centre Ω et son rayon.
 - b) Étudier la position relative de S et P et caractériser leur intersection.
- 3) Pour tout réel m on associe le plan P_m dont une équation cartésienne est :

$$2mx + (1-2m)y + mz + 1 - 2m = 0$$

- a) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à S .
- b) Soit H le point de contact de P_m et S lorsqu'ils sont tangents. Déterminer les coordonnées de H .

EXERCICE 2:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère le point $A(0, 0, -1)$, le plan $Q: x = y$ et la droite $\Delta: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

- 1) Soit le plan P qui contient la droite Δ et passant par le point A
 - a) Montrer que le plan P est d'équation : $2x + 2y - z - 1 = 0$
 - b) Montrer que P et Q sont perpendiculaires
 - c) Soit P' le plan parallèle à P et passant par le point O . Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta' = P' \cap Q$
 - d) Montrer que Δ et Δ' ne sont pas coplanaires
- 2) Soit S_m l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+1)x + 2my - 2z + m^2 + m + 1 = 0$$
 où m est un paramètre réel
 - a) Montrer que S_m est une sphère dont on déterminera le centre I_m et le rayon R_m
 - b) Déterminer l'ensemble de points I_m lorsque m décrit \mathbb{R}
 - c) Déterminer $P \cap S_0$

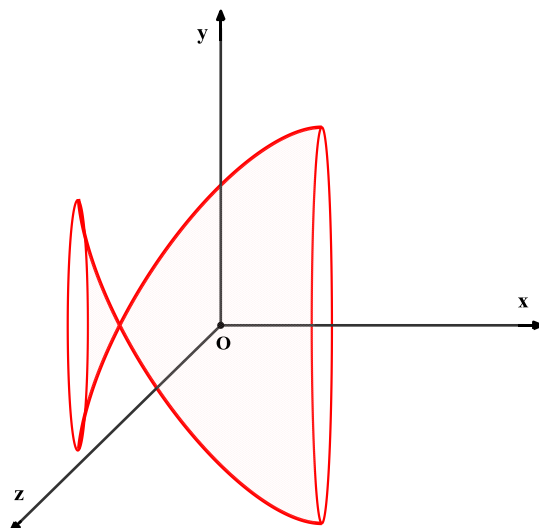
EXERCICE 3 :

Dans l'annexe ci-joint (Figure 1), on a représenté dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

la courbe \mathcal{C} de la fonction f définie sur $I = [-\sqrt{2}, 1]$ par $f(x) = x + \sqrt{2-x^2}$

et les demi tangentes à la courbe \mathcal{C} aux points d'abscisses $-\sqrt{2}$ et 1 .

- 1) Calculer le volume \mathcal{V} du solide de révolution engendré par la rotation de \mathcal{C} autour de l'axe des abscisses



- 2) a) Justifier graphiquement que f réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera

- b) Tracer sur la figure 1, la courbe \mathcal{C}' représentative de f^{-1} la fonction réciproque de f .

- 3) Soit F la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \int_0^{-\sqrt{2}\sin x} \sqrt{2-t^2} dt$

- a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], F'(x) = -1 - \cos(2x)$$

- b) Calculer $F(0)$ et en déduire l'expression de $F(x)$.

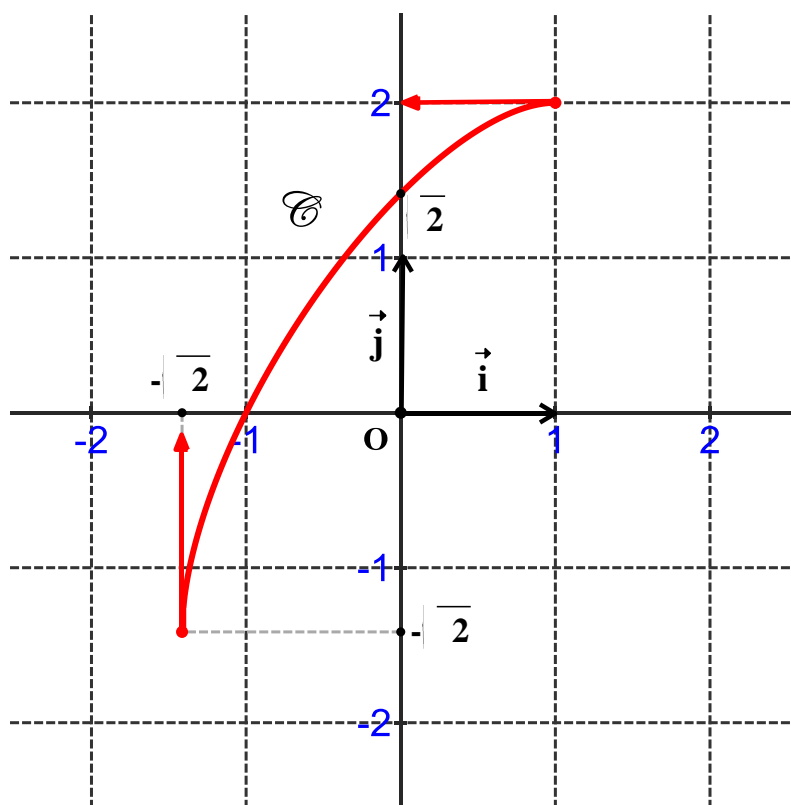
- c) Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et en déduire l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par \mathcal{C}' et les droites d'équations : $y=0$ et $y=x$

- 4) a) Montrer que pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{4-x^2}}{2}$

En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx$.

Figure 1

ANNEXE A RENDRE



Nom et prénom :