Lycée Nasrallah « 4éme SC » Prof : Ben Taieb Lotfi	2016/2017 Série Révision MATHEMATIQUES primitives et espaces

Exercice 1

On pose f(x)= $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, x $\in [1,+\infty[$

1/Montrer que f admet des primitives sur $[1,+\infty[$

2/Soit F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1 et G la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = F(\frac{1}{\cos x})$

a. Montrer que G est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer G'(x)

b. En déduire que pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}[$ $G(x) = \tan x - x$

c. Calculer $F(\sqrt{2})$ et F(2)

3/Soit $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout x de $]1,+\infty[$.

Déterminer la primitive H de h sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en $\sqrt{3}$

Exercice 2

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$ avec $x \in \mathbb{R}$

1/ Dresser le TV de f sur $[1,+\infty[$

2/ Montrer que la droite Δ : x=1 est un axe de symétrie de C_f

3/Tracer la courbe C_f

4/ a. Montrer que f admet une seule primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

b. Montrer que F et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de F

5/ $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on pose $g(x) = F(1+\tan x)$

a. Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer g'(x).

b. Déduire que $g(x) = x+\frac{\pi}{4}$

6/Soit $H = \int_0^2 f(x)dx$. Montrer que $H = \frac{\pi}{2}$

Exercice3

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit les points A (1, 2,-5) ; B (3, 4,-3) et C (0, 1,- 1)

1) Montrer que OABC et un tétraèdre.
2) Calculer l'aire du triangle ABC
3) a. Calculer le volume de tétraèdre OABC
   b. En déduire la distance de O au plan (ABC)
4) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant A, B et C
5) Déterminer l'équation cartésienne du plan Q médiateur de [AB]
6) Etudier la position de Q et P puis déterminer $\Delta = P \cap Q$
7) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 -2x-2y -1 = 0$
   a. Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R
   b. Montrer que Q et S sont sécants suivant un cercle ζ dont on précisera le centre J et le rayon
   c. Calculer d (I, Δ). En déduire la position de S et Δ

Exercice 4

Dans l'espace rapporter à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on considère les points A(3,2,4), B(0,3,5) C(0,2,1) et D(3,1,0)

1/ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

2/ Montrer que ABCD est un parallélogramme et calculer son aire

3/ Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 -4x+4y -10z +15 = 0$

Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R

4/ Soit P le plan passant par A, B et D

a. Montrer que P est tangent à S au point A
b. Soit E (2, 1,2). Vérifier que E est un point de S
c. Déterminer une équation du plan Q qui coupe S suivant un cercle de diamètre [AC]