Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(-2\,;\,0\,;\,1)$, $B(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $C(-2\,;\,2\,;\,2)$.

1. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
   b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
   c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x-y+2z+2=0$.
3. Soient $\mathscr{P}_1$, et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $x+y-3z+3=0$ et $x-2y+6z=0$.
   Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 \\ y & = & -1+3t \\ z & = & t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\,;\,-3\,;\,1)$ et de rayon $r=3$.
   a. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

   Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   b. Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
   c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathscr{S}$.

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

– les points $A(1\,;\,1\,;\,1)$ et $B(3\,;\,2\,;\,0)$;
– le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;
– le plan (Q) d'équation : $x-y+2z+4=0$;
– la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x+y-z-8=0$
2. Déterminer une équation de la sphère (S).
3. **a.** Calculer la distance du point A au plan (Q).
   En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).
   b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?
4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées $(0\,;\,2;\,-1)$.
   a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.
   b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 12-5t \\ z & = & 4-3t \end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$.
   c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)
   d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).
   L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
   « Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».
   Justifier votre réponse.

Exercice 3

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1. Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{15}{19} ; \frac{45}{19} ; \frac{45}{19}\right)$.

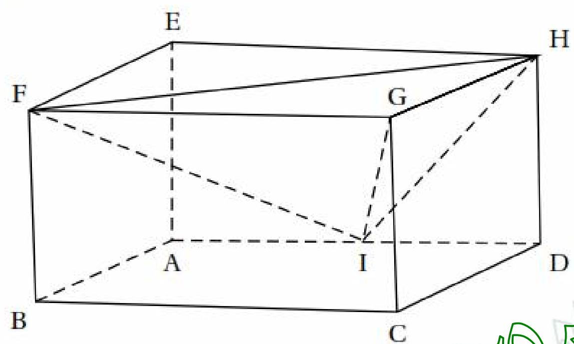
- **a.** Démontrer que les points H, C, I sont alignés.
- **b.** Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
- **c.** En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

4. Calculs d'aire et de volume.

- **a.** Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.
- **b.** Déterminer la distance du point O au plan (ABC).
- **c.** Calculer l'aire du triangle ABC.

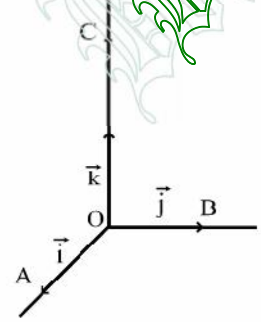
Exercice 4

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.
On appelle I le milieu de [AD].



Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,2)$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$ est égal à
 a/ $\overrightarrow{OA}$ b/ $2\,\overrightarrow{OA}$ c/ $-2\,\overrightarrow{OA}$.

2) Le réel $\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AO}).\overrightarrow{AC}$ est égal à
 a/ 0 b/ $\frac{1}{3}$ c/ 2 .

3) La droite (BC) est l'intersection des plans d'équations
 a / $x = 1$ et $2y + z - 2 = 0$.
 b / $x = 0$ et $y + 2z - 1 = 0$.
 c / $x = 0$ et $2y + z - 2 = 0$.

4) Une équation de la sphère de centre O et tangente au plan (ABC) est
 a / $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 b / $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{9}$.
 c / $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - \frac{4}{9}$.

Exercice 6

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.
2. a. Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\frac{1}{3}$.

   b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
   En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH).
3. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).

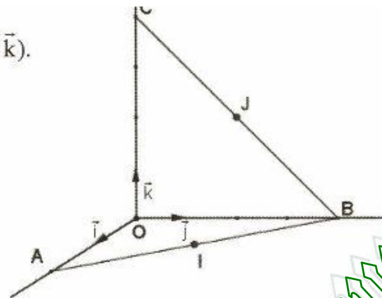
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

   c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH).
4. a. La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

   b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

   c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
   Soit Γ la sphère de centre G passant par K.
   Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?On demande de préciser les éléments caractérisant cette intersection

Exercice 7



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$ et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1) Déterminer les coordonnées des points I et J.

2) Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $MI = MJ$.

   a/ Montrer que P est le plan d'équation $2x-4z+3=0$.

   b/ Montrer que la droite (OC) et le plan P sont sécants en un point K que l'on précisera.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$$x^2+y^2+z^2-\frac{3}{2}z-5=0.$$

   a/ Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

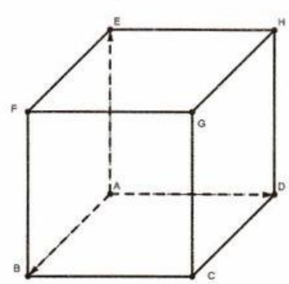
   b/ Vérifier que les points I et J appartiennent à la sphère S.

   c/ Montrer que S est la seule sphère qui passe par les points I et J et dont le centre est un point de la droite (OC).

4) Déterminer l'intersection du plan P avec la sphère S.

Exercice 8

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
On munit l'espace du repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1) Le vecteur $\overrightarrow{BF}\wedge\overrightarrow{BC}$ est égal à
   a) $\overrightarrow{BG}$ b) $\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{BA}$.

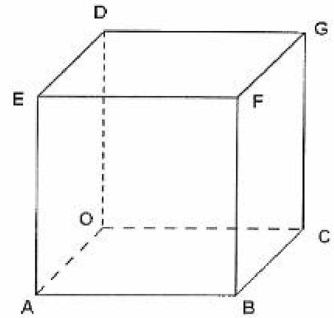
2) L'intersection des plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$ est la droite
   a) (CH) b) (CF) c) (CG).

3) Une équation du plan (ACE) est
   a) $x + y = 0$ b) $x - y = 0$ c) $x - y = 1$.

4) L'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ avec le plan d'équation $z = 1$ est
   a) un cercle b) un point c) l'ensemble vide.

Exercice 9

Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un cube d'arête 1.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$.

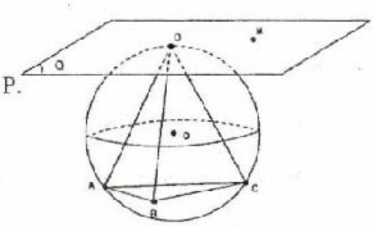


1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$.
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACD) est $x + y + z - 1 = 0$.
2) Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD)
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de Δ et du plan (ACD).
3) Pour tout réel m, on désigne par S_m l'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0$
   a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon r.
   b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m passe par le point A.
4) a) Vérifier que les centres des sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ sont deux points de la droite Δ.
   b) Justifier que le plan (ACD) coupe les deux sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ suivant un même cercle qu'on précisera .

Exercice 10

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(2,0,1) , B(0,2,1) et C(1,2,0).

1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b- Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 3 = 0$.
2) Soit la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
   a- Vérifier que A, B et C sont des points de la sphère S.
   b- Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.
3) Soit le point D de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.
   On désigne par Q le plan passant par D et parallèle au plan P.



   a- Déterminer une équation cartésienne du plan Q.
   b- Montrer que Q est tangent à la sphère S au point D.
4) Soit M(x, y, z) un point de l'espace n'appartenant pas à P.
   a- Calculer $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}$
   b- Montrer que le volume V du tétraèdre MABC est égal à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$.
   c- En déduire que pour tout point M du plan Q ; $V = \sqrt{\frac{5}{3}} - 1$.