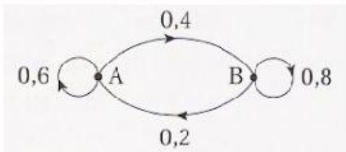
Les joueurs d'un club de football sont partagés en deux équipes : une équipe A et une équipe B. L'entraîneur change la composition de ces équipes après chacun des matchs, suivant les performances des joueurs.
Une étude statistique menée au cours des saisons précédentes permet d'estimer que :

- si un joueur fait partie de l'équipe A, la probabilité qu'il reste dans cette équipe pour le match suivant est 0,6 ;
- si un joueur fait partie de l'équipe B, la probabilité qu'il change d'équipe le match suivant est 0,2.

La situation précédente peut être schématisée par le graphe probabiliste ci-dessous et sa matrice de transition.



$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Pour une entier naturel n donné, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice-ligne décrivant l'état probabiliste lors du match n.
Enzo vient d'arriver dans le club et la probabilité a_0 qu'il joue dans l'équipe A pour le match de préparation (match 0) est 0,1.

- L'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.
- On a donc, par exemple, $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,76 \end{pmatrix}$.
  La probabilité a_1 qu'Enzo joue dans l'équipe A pour le match 1 est 0,24.
- On a aussi, par exemple, $P_2 = P_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,296 & 0,704 \end{pmatrix}$
  La probabilité a_2 qu'Enzo joue dans l'équipe A pour le match 2 est 0,296.

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B.
Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84% des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76% pour le conditionnement B.
Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le n-ième mois après l'étude et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n-ième mois après l'étude. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   b) Montrer que la matrice ligne P_2 est égale à $\begin{pmatrix} 0,564 & 0,436 \end{pmatrix}$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P = P \times M$. Déterminer les réels a et b. Interpréter ce résultat.
4. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - 0,6$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6.
   b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que $a_n = -0,1 \times 0,6^n + 0,6$.
   c) À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A est-elle supérieure à 0,595 ?