Exercice 1

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1) a) *Placer les points A (-2i) ; B (1+i) ; C (4+2i) et I (2)* . b) *Vérifier que I est le milieu de [AC]*
2) a) *Calculer les affixes u et u' des vecteurs* $\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{BC}$. b) *Montrer que ABC est un triangle isocèle en B*
3) *Soit* $D = S_I(B)$
   a) *Calculer l'affixe du point D* . b) *Montrer que ABCD est un losange*
4) *Déterminer géométriquement les ensembles suivants :*
   $\Delta = \{M(z)$ *tel que* $|z-2| = |z+2i|\}$;
   $\Delta' = \{M(z)$ *tel que* $|iz-i+1| = |z-4-2i|\}$
   $\zeta = \{M(z)$ *tel que* $|2z+4i| = 4\}$.

Exercice 2

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B, C et E d'affixes respectives $z_A = 2-i$; $z_B = -1$ *et* $z_C = 3i$ *et* $z_E = 3-3i$

1) a) *Placer les points A, B, C et E dans P.*
   b) *Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.*
   c) *Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un carré.*
2) *Montrer que les points A, C et E sont alignés.*
3) *On associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe* $Z' = \frac{iz+3}{z-2+i}$ $(z \neq 2-i)$
   a) *Déterminer Z' sous forme algébrique lorsque :* $z = z_E$.
   b) *Montrer que* $|Z'| = \frac{CM}{AM}$
   c) *Déduire l'ensemble* Δ *des points M d'affixes z tel que* $|Z'| = 1$
4) *Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que Z' soit réel.*

Exercice 3

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+iz)^2+3=0$

2°) Le plan étant muni d'un repère complexe orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectivement $z_A = -2$; $z_B = \sqrt{3}+i$; $z_C = \sqrt{3}-i$ et $z_D = 1+i\sqrt{3}$

a) Placer les points A , B , C , et D

b) Déterminer la nature du triangle ABC

Exercice 4

On considère le polynôme P(z) suivant : $P(z)=z^3+2(\sqrt{2}-1)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8$

1- Calculer P(2). Déterminer une factorisation de P(z) par (z-2)

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation $P(z)=0$

On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive

Vérifier que $z_1+z_2=-2\sqrt{2}$. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2

3- a- placer dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2cm) les points : A d'affixe 2 , B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I le milieu de [AB]

b- démontrer que le triangle OAB et isocèle . en déduire une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OI}})$

c- calculer l'affixe z_I de I , puis le module de z_I

d- déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$

Exercice 5

α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ et z un nombre complexe,

on considère le polynôme P(z), défini par : $P(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$.

1- a. Calculer P(1).

b. En déduire l'existence de trois réels a, b, c tels que $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$. Déterminer a, b et c.

c. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$.

2. On considère trois nombres complexes : $z_1=1$; $z_2=-\sin\alpha+i\cos\alpha$; $z_3=-\sin\alpha-i\cos\alpha$.

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

Exercice 6

θ est un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$; on pose pour tout nombre complexe z

$f_\theta(z)=z^2-(i+e^{i\theta})z+(1+i)(-1+e^{i\theta})$ tout nombre

1- a- vérifier que $f_\theta(1+i)=0$

b- en déduire les solution z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z)=0$

2- dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B et M d'affixes respectives -1 , $i\sqrt{3}$ et $-1+e^{i\theta}$

a- montrer que lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$, M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on précisera le rayon

b- déterminer les valeurs de θ pour les quelles la droite (BM) est tangente au cercle $\mathscr{C}$

Exercice 7

Soit a un nombre complexe non nul et (E) l'équation $z^2-2z+1+a^2=0$

1- résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E)

2- le plan complexe étant rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A,B d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$. On pose $a=a_1+ia_2$; a_1 et a_2 deux réels

a- montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $a_1=0$

b- montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a|=1$

3- on pose $a=e^{i\alpha}$ ou $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

a- vérifier que pour tout réel x , on a $1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1-e^{ix}=-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b- en déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1+ia$ et $1-ia$.

c- déterminer a pour que les points O , A et B forment un triangle isocèle rectangle en O .