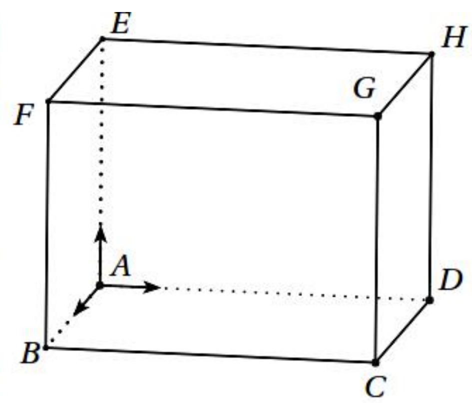
Exercice 1

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $ABCDEFGH$ est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{k}$.



1. (a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

   (b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.

   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2. Soit α un réel différent de 1 et M le point des coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.

   (a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.

   (b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3. Soit $\mathscr{V}$ le volume du tétraèdre $MEBG$.

   (a) Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de α.

   (b) Calculer le volume du tétraèdre $AEBG$.

   (c) Pour quelles valeurs de α $\mathscr{V}$ est-il égal au volume du parallélépipède $ABCDEFGH$?

Exercice 2

L'epace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On donne les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)$ et $D(0,1,-1)$.

On note (S) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

1. (a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$.

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (OCD).

2. Montrer que (S) est une sphère donner les cordonnées du point I centre de (S) et le rayon de (S).

3. (a) Calculer la distance de I à P. En déduire la position de (S) et (OCD).

   (b) Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$. En déduire $(S) \cap (OCD)$.

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On donne les points $A(2,-3,-1)$, $B(1,0,2)$ et $C(0,1,3)$.

1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés .
   b) Écrire une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C

2. Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on considère l'ensemble S_t des points $M(x,y,z)$ vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2ysint + 2z + t^2 + sin^2t - 1 = 0$.
   Montrer que S_t est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

3. a) Étudier suivant les valeurs de t, l'intersection de la sphère S_t et du plan P.
   b) Dans le cas où le plan P est tangent à la sphère S_t, déterminer les coordonnées du point de contact.

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On considère les points A(2,-1,1) ,B(-1,1,-1) et C(1,2,0).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire que A,B et C ne sont pas alignés.
   c) Calculer l'aire du triangle ABC.
2) Soit P le plan d'équation : $2x + 2y - 5z - 4 = 0$. Soit Δ la droite d'équations cartésiennes : $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = z - 1$.
   a) déterminer l'intersection de P et Δ.
   b) Vérifier que la droite (BC) est incluse dans P et que Δ passe par le point A.
3) Soit le point D(-2,3,-1).
   a) Montrer que A,B,C et D ne sont pas coplanaires.
   b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
4) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tel que $(\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{AM}) \wedge \overrightarrow{BM} = 0$.

Exercice 4

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.Soit I=B*F et J tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points I et J et du vecteur $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$.
   b) Montrer que l'aire du triangle AIJ est $\frac{\sqrt{14}}{3}$.
2) Montrer que le volume du tétraèdre AIJE est $\frac{1}{9}$ puis déduire la distance du point E au plan AIJ.
3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est $x + 3y - 2z = 0$ .Calculer la distance de E au plan AIJ.
4) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$.
   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
   b) Montrer que S et (AIJ) sont sécants suivants un cercle que l'on précisera.
5) Déterminer les plans qui sont parallèles au plan (AIJ) et tangents à S et déterminer les coordonnées de leurs points de contact.

Exercice 5

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Soient les points I,J et K tels que I=B*C ; J=A*E ;K=D*C

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1) a) Vérifier que I a pour coordonnées $(1,\frac{1}{2},0)$ et K a pour coordonnées $(\frac{1}{2},1,0)$.
   b) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{GK}$.
   c) Calculer alors le volume V de tétraèdre JGKI.
2) a) Montrer que le plan (GIK) a pour équation $2x + 2y - z - 3 = 0$.
   b) Montrer que $(CJ): \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ $\alpha \in IR$.
3) La droite (CJ) coupe le plan (GIK) en H'.
   a) Vérifier que la droite (CJ) est perpendiculaire au plan (GIK).
   b) Déterminer les 2 points de (CJ) dont la distance au plan (GIK) est égale à 1.