LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE
PROF: SALAH HANNACHI
« 4^{EME}MATHS »

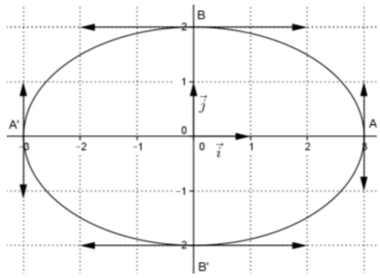
2014/2015
SERIE D'EXERCICES N16
Les coniques

EXERCICE N1 : (QCM)

I/ Soit D une droite et F un point du plan n'appartenant pas à D. On note H le projeté orthogonal de M sur D. L'ensemble Γ des points M du plan tels que MF=(ln2).MH est :

a) une parabole b) une hyperbole c) une ellipse

II/ On donne dans le graphique ci-contre une ellipse $\mathcal{E}$.



1) L'ellipse $\mathcal{E}$ admet pour équation :

a) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

2) L'un des foyers de l'ellipse $\mathcal{E}$ est le point :

a) $F(0,\sqrt{5})$ b) $F(\sqrt{13},0)$ c) $F(\sqrt{5},0)$

3) L'une des directrices de l'ellipse $\mathcal{E}$ est la droite :

a) D : $y=\frac{4}{\sqrt{5}}$ b) D : $x=\frac{9}{\sqrt{5}}$ c) D : $x=\frac{4}{\sqrt{5}}$

III/ 1) L'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre O, de foyer F(5,0) et de directrice D : $x=\frac{9}{5}$ a pour équation :

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ c) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

2) La courbe d'équation $|x^2-y^2|=1$est :

a) une hyperbole b) la réunion de deux hyperboles c) la réunion d'une ellipse et d'une hyperbole

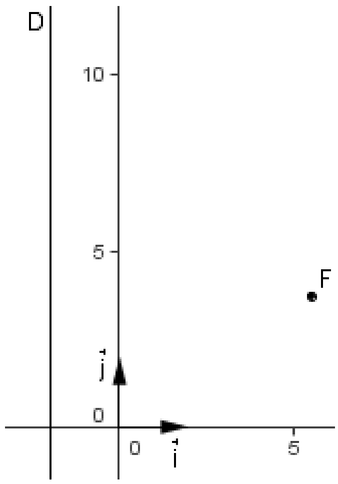
3) L'une des directrices de l'hyperbole $\mathcal{H}$: $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ est la droite :

a) D : $x=\frac{9}{5}$ b) D : $y=\frac{16}{5}$ c) D : $y=\frac{4}{5}$

EXERCICE N2 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Dans la figure ci-contre on désigne par F et par D respectivement le foyer et la directrice d'une parabole P.



1) Construire le sommet S de la parabole P.
2) Construire le point A de la parabole P d'ordonné 10.
3) Construire le point B intersection de la parabole P et l'axe $(O,\vec{\imath})$.
4) Tracer l'allure de la parabole P.

EXERCICE N3 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On donne les paraboles P, P' et P'' d'équations respectives : $y^2=6x$; $y^2=-x$ et $x^2=\frac{1}{2}y$

Déterminer les éléments caractéristiques (paramètre, foyer et directrice) de chacune de ces paraboles

EXERCICE N4 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit la courbe (Γ) dont une équation est :
$y^2+2y-4x+3=0$.
Montrer que (Γ) est une parabole dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE N5 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit P la parabole de foyer O et de directrice D d'équation $x=-2$.

1) a) Montrer qu'une équation de P est $y^2=4x+4$

b) Tracer la parabole P. On notera S son sommet

2) Soit le point $A(-2, \frac{3}{2})$.

a) Déterminer, par leurs équations, les tangentes à P issues de A. (On note T et T' ces tangentes, E et E' leurs points de contact respectifs).

b) Vérifier que T et T' sont perpendiculaires et que O, E et E' sont alignés.

EXERCICE N6 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\mathfrak{R}=(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la conique (C) d'équation :

$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$

1) Montrer que (C) est une hyperbole dont on précisera le centre Ω, les directrices, les sommets et les asymptotes. Tracer (C).

2) Soit les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

Donner une équation de (C) dans le repère $\mathfrak{R}'=(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

EXERCICE N7 :

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $z'=i.z^2+2z$, avec $z=x+iy$; $(x,y)\in IR^2$

1) Donner la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

2) On note (Γ) l'ensemble des points M(z) tels que z' soit un réel positif.

a) Donner une équation cartésienne de (Γ).

b) Montrer que (Γ) est une partie d'une hyperbole $\mathcal{H}$ qu'on précisera.

3) Donner une équation de $\mathcal{H}$ rapportée à ses asymptotes

EXERCICE N8 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer la nature de chacune des courbes suivantes en donnant ses éléments caractéristiques, puis la construire :

a) $C_1 : x^2 + 4y^2 + 6y = 0$

b) $C_2 : 4y^2 - 25x^2 + 8y - 96 = 0$

c) $C_3 : x^2 - y = 3x - 1$

EXERCICE N9 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2=1$.

Déterminer les équations des asymptotes de $\mathcal{H}$ et tracer $\mathcal{H}$.

EXERCICE N10 :

Soit m un paramètre réel. Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe C_m d'équation :

$mx^2 + (1 + m^2)y^2 - 2my = 0$

EXERCICE N11 :

Soit (C) la conique d'équation : $2x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$

Déterminer les tangentes issues du point A(2,3)

EXERCICE N12 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne la courbe $\mathcal{H}$ dont une équation est $x^2 - y^2 + 4x + 2y = 1$.

1) Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole équilatère dont on précisera l'excentricité, les foyers, les sommets le centre et les directrices.
2) Soit les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$
   Donner une équation de (C) dans le repère $\Re' = (O, \vec{u}, \vec{v})$

EXERCICE 13 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants identifier l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M(x,y) tels que :

a) $y=2.t^2$ et $x=t$; $(t \in IR \setminus \{1\})$

b) $x=\frac{2}{\cos\theta}$ et $y=3\tan\theta$; $(\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[)$

c) $x=5\cos\theta$ et $y=3\sin\theta$; $(\theta \in IR)$

EXERCICE 14 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f la similitude directe de centre A(0,1), de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1) Déterminer la forme complexe de f.
2) Une courbe (C) a pour équation $x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y=0$
   a) Déterminer une équation cartésienne de (C') image de (C) par f.
   b) En déduire que (C') est une parabole que l'on caractérisera. Tracer (C').
3) Déterminer alors la nature de la courbe (C).

EXERCICE N15 :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On désigne par (C) l'ensemble des points M(x,y) tels que : $4x|x|+y^2 -16x-20=0$.

1) Montrer que (C) est la réunion d'une partie d'une conique (C_1) et d'une partie d'une conique (C_2) que l'on identifiera.
2) Déterminer pour chacune des coniques les éléments caractéristiques.
3) Soit A un point où chacune des coniques coupe la droite $(O, \vec{j})$.
   Montrer que les deux coniques (C_1) et (C_2) ont la même tangente en A.

EXERCICE N16 :

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R>1. A tout point M d'affixe $z=Re^{i\theta}$ du cercle, on associe le point M' d'affixe $\frac{1}{z}$.

1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du milieu I de [MM'].
2) Montrer que I varie sur une ellipse $\mathcal{E}$ lorsque M varie sur (C). Donner les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}$.

EXERCICE N17 :

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy=1$. On désigne par A, B et C les points de $\mathcal{H}$ d'abscisses respectives 1,2 et $-\frac{1}{2}$.

1) Montrer que la tangente T à $\mathcal{H}$ en A est perpendiculaire à (BC).
2) On désigne par F le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse 3.
   a) Donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A du triangle ABF.
   b) Démontrer que l'orthocentre de ABF est un point de $\mathcal{H}$.

EXERCICE N18 :

1) Soit $\mathcal{E}=\{M(x,y) \in P;\ x^2+4y^2=1\}$ Donner les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}$.
2) Soit D et D' les droites d'équations respectives x=1 et x=-1 et $F(\frac{\sqrt{3}}{2},0)$. Soit $M_0(\cos(\theta), \frac{1}{2}\sin(\theta))$un point de P, avec $\theta \in IR \setminus \{k\pi\,;k \in \mathbb{Z}\}$.
   a) Vérifier que M_0 appartient à $\mathcal{E}$.
   b) Ecrire une équation de la tangente T à $\mathcal{E}$ au point M_0.
   c) T coupe D et D' respectivement en K et K'.
   Montrer que le triangle KFK' est rectangle en F.

EXERCICE N19 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
A tout point M(x,y) on associe son affixe z=x+iy.
On note P l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation $\left|\frac{z+i\bar{z}}{2}\right|=\left|z-\frac{1+i}{2}\right|$
1) Montrer que P a pour équation : $x^2+y^2-2xy-2x-2y+1=0$
2) On pose $\vec{e_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ et $\vec{e_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})$. Vérifier que $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ est un repère orthonormé du plan.
3) Déterminer une équation de P dans le repère $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. Quelle est alors la nature de l'ensemble P et quels sont ses éléments caractéristiques.

EXERCICE N20 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit t un paramètre réel strictement positif. On note (Γ_t) l'ensemble des points M(x,y) vérifiant :
$(\ln t)x^2+y^2-2(\ln^2 t)x-2(\ln t)y+(\ln^3 t)=0$
1) Reconnaitre (Γ_1). On suppose dans la suite que $t\in IR_+^* \setminus \{1\}$.
2) a) Discuter suivant le paramètre réel t la nature de l'ensemble (Γ_t).
   b) Pour $t \in]0,1[\cup]1,e^2[$, on note I_t le centre (Γ_t). Que décrit le point I_t quand t décrit $]0,1[\cup]1,e^2[$.
3) a) Déterminer t_0 pour que (Γ_{t_0}) soit un cercle, préciser son centre.
   b) Déterminer t_1 pour que (Γ_{t_1}) soit une hyperbole équilatère.

EXERCICE N21 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
1) Déterminer la forme complexe de f.
2) Une courbe (C) a pour équation $15x^2+13y^2-2\sqrt{3}xy-768=0$
   a) Déterminer une équation cartésienne de (C') image de (C) par f.
   b) En déduire que (C') est une ellipse que l'on caractérisera. Tracer (C').
3) Déterminer alors la nature de la courbe (C).

EXERCICE N22 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

1) Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ et préciser ses foyers, ses sommets. Tracer $\mathscr{C}$.
2) Déterminer les équations des hyperboles de centre O, dont les sommets sont des sommets de $\mathscr{C}$ et les asymptotes sont perpendiculaires. Tracer ces hyperboles.
3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\int_0^{6\sin x}\sqrt{36-t^2}\,dt$.
   a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
   b) Montrer que l'aire de $\mathscr{C}$ en unité d'aires est $\mathscr{A}=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   c) En déduire la valeur de $\mathscr{A}$.

EXERCICE N23 : (Bac 2014)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

Déterminer les coordonnées des foyers de l'ellipse (E) et donner son excentricité.

b) Soit (P) la parbole d'équation $y^2=2x+4$.

Déterminer les coordonnées du foyer F de la parabole (P) et donner une équation de sa directrice.

2) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'ellipse (E) et la parabole (P).

Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2=-2|x|+4$

a) Vérifier que $(O,\vec{\jmath})$ est un axe de symétrie de (Γ).

b) Tracer (Γ) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

3) a) Soit (C) le cercle d'équation : $x^2+y^2=4$

Vérifier que pour tout réel t de [0,2], le point $M(t,\sqrt{4-t^2})$ appartient à (C).

b) On pose $I_1=\int_0^2\sqrt{4-t^2}\,dt$. Montrer que $I_1=\pi$

4) Calculer $I_2=\int_0^2\sqrt{-2t+4}\,dt$.

5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et l'ellipse (E).

Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de I_1 et I_2 puis calculer $\mathcal{A}$.