| Prof : Khammour.Khalil<br>**Année Scolaire :** 2013/2014 | **Révision : Arithmétiques+ Intégrales+Similitudes** | $4^{ème}$ Math<br>**Tunis ,Tél :27509639** |
|---|---|---|

## Exercice n°1 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifié ne sera pas prise en compte toute trace de recherche sera valorisée.

**Affirmation 1 :** a et b deux entiers naturels tel que $b \geq 2$.Si le reste de la division euclidienne de a par b est b – 1 ; alors : $a^3 + 1$ est divisible par b.

**Affirmation 2 :** Pour tout entier naturel n : Le nombre $15 \times 3^n - 3$ est divisible par 7 si est seulement si : $n \equiv 2(mod\ 6)$.

**Affirmation 3 :** Pour tout entier naturel n : $16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$ est divisible par5.

**Affirmation 4 :** Le reste de la division euclidienne de $7 \times 3^{20} + 6$ par 41 est 38.

**Affirmation 5 :** La valeur exacte de l'intégrale $I = \int_1^e (t^2 \ \ln t)\ dt$ est $I = \frac{2e^3+1}{9}$.

**Affirmation 6 :** Soit f une fonction définie sur $]\,0,+\infty[$ par : $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x$.Une primitive F de f sur $]\,0,+\infty[$ et qui prend la valeur -1 en 1 est $F(x) = x\ln x - x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

**Affirmation 7 :** $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$.

## Exercice n°2 :

Soit la fonction F définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$ par :

$$F(x) = \int_2^{1+\tan x} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$$

1) a) Justifier l'existence de F sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$.
   b) Montrer que la fonction F est paire.
   c) Calculer $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2) a) Montrer que F est dérivable sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ et calculer F '(x).
   b) En déduire que $\forall x \in ]0;\frac{\pi}{2}[$ , $F(x)=2x-\frac{\pi}{2}$.
   c) Expliciter F(x) pour tout $x \in ]\frac{-\pi}{2};0[$
   d) Calculer alors : $\int_2^4 \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$.

3) On considère la suite $(I_n)$ définie sur IN par : $\int_2^4 \frac{\sqrt{t-1}}{t^{n+2}}dt$.

   a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $I_0$.

b) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante

c) En déduire que la suite $I_n$ est convergente.

**Exercice n°3 :**

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.
   c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
   d) Tracer (C) et (C') la courbe de $f^{-1}$ dans un même repère.
2) Soit U la suite définie sur IN* par : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$
   a) Calculer $U_1$ et interpréter graphiquement $U_1$.
   b) Montrer que la suite $U_n$ est décroissante.
   c) En déduire que la suite $U_n$ est convergente.
   d) Montrer que pour $n \geq 1$ $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{(n+1)}$.
   e) Déterminer la limite de $U_n$.
3) Pour tout $n \geq 3$ , on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2}\, dx$
   a) Vérifier que pour $n \geq 3$ on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.
   b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur $I_n$ ;montrer que pour tout entier $n \geq 3$ $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$ .
   c) En déduire que ,pour tout entier $n \geq 3$ on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)}$
   d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(nU_n)$.

**Exercice n°4 :**

On considère la suite $(U_n)$ d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 10U_n + 21 \end{cases}$

1) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $3U_n = 10^{n+1} - 7$.
   b) Calculer pour tout $n \in$ IN :$\sum_{k=0}^{n} 10^k$
   c) En déduire que pour tout $n \in$ IN : $U_n = 3\sum_{k=0}^{n}(10^k) - 2$
   d) Déterminer alors le reste modulo 10 de $U_n$.
2) a) Démontrer que pour tout entier n, $U_n$ n'est pas divisible par 2 ni par 3 ni par 5.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n ; $3U_n \equiv 4 - (-1)^n (\text{mod } 11)$.
   c) En déduire que pour tout entier n , $U_n$ n'est pas divisible par 11.
3) a) Démontrer légalité : $(10)^6 \equiv 1 (\text{mod } 17)$.
   b) En déduire que pour tout entier k , $U_{16k+8}$ est divisible par 17.

**Exercice n°5 :**

Le plan est orienté dans le sens direct.

On considère un triangle OAB tel que OB = 2OA et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.On pose I le milieu de Segment [OB].

1) On désigne par S la similitude directe transformant B en I et I en A.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S.
   b) Soit $\Omega$ le centre de S .En utilisant la relation $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{\Omega I} - \overrightarrow{\Omega B}$ démontrer que $BI^2 = \Omega B^2$.
   c) En déduire la nature du triangle $\Omega$BI.
2) On pose $\sigma = SoS$.
   a) Quelle est la nature de la transformation $\sigma$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b) Déterminer l'image de B par la transformation $\sigma$.

**Exercice n°6 :**

On considère, dans un plan orienté, un triangle ABC rectangle en A et tels que AC = 2AB et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

On désigne par F le projeté orthogonal de A sur [BC], I le symétrique de F par rapport à (AB) et J le symétrique de F par rapport à (AC).

1) a) Montrer que les droites (BI) et (AI) sont perpendiculaires ainsi que les droites (CJ) et (AJ).
   b) Caractériser l'application $S_{(AC)}oS_{(AB)}$. En déduire que A est le milieu de [IJ].
2) Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que F est le centre de S.
   c) Montrer que S(I)=J. En déduire que CJ=IJ
3) Soit $\sigma$ la similitude indirecte qui transforme I en F et F en J.
   a) Déterminer le rapport de $\sigma$.
   b) Soit $\Omega$ le centre de $\sigma$ . Montrer que $\overrightarrow{\Omega J} = 4\overrightarrow{\Omega I}$.
   c) Soit E le point définie par $\overrightarrow{\Omega E} = 2\overrightarrow{\Omega I}$. Montrer que l'axe $\Delta$ de $\sigma$ est la médiatrice du segment [EF].