

Exercice n°1 :

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Proposition n°1 : « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de l'équation $3x - 5y = 2$ est l'ensemble des couples $(5k-1 ; 3k-1)$ ou $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition n°2 : « $x^2 + x \equiv 0(\text{mod}3)$ si et seulement si $x \equiv 0(\text{mod}3)$ ».

Proposition n°3 : « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4+10k ; 9+24k)$ ou $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition n°4 : «L'équation (E) : $24x+34y=0$ n'a aucune solution ».

Proposition n°5 : «Toutes les solutions de l'équation (E) : $x^2 - x+4 \equiv 0(\text{mod}6)$ sont des entiers pairs ».

Proposition n°6 : «Soient a et b deux entiers naturels, s'il existe deux entiers relatifs U et V tels que $aU + bV = 2$ alors le PGCD (a,b)=2

Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

Exercice n°2 :

Déterminez l'ensemble des couples (x,y) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant les équations suivantes:

- a) $5x + 12y = 20$ b) $x + 5y = 1$ c) $2x - 5y = 10$
d) $6x + y = 21$ e) $-2x + 3y = 9$ f) $25x + 31y = 2$

Exercice n°3 :

Soit n un entier naturel non nul .

- 1) On considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y deux entiers relatifs.
a) Déterminer un couple (u,v) d'entiers relatifs tels que $3u+7v=1$.
En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).
b) Déterminer un couple (x,y) d'entiers relatifs solution de (E).
2) On considère l'équation notée (E') : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y deux entiers relatifs.
a) Montrer que $100 \equiv 2(\text{mod}7)$.
b) Démontrer que si (x,y) est solution de (E') alors $3x^2 \equiv 2^n (\text{mod}7)$.
c) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

- d) Démontrer que 2^n est congru à 1,2 ou 4 modulo 7. En déduire que (E') n'admet pas de solution.

Exercice n°4 :

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1,46]$.

- 1) On considère l'équation notée (E) : $23x + 47y = 1$ où x et y deux entiers relatifs.
a) Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
b) Déterminer l'ensemble de couple (x,y) solutions de (E).
c) En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1(\text{mod}47)$.

2) Soit a et b deux entiers relatifs .

a) Montrer que si $ab \equiv 0 \pmod{47}$ alors $a \equiv 0 \pmod{47}$ ou $b \equiv 0 \pmod{47}$.

b) En déduire que si $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$ alors $a \equiv 1 \pmod{47}$ ou $b \equiv -1 \pmod{47}$.

Exercice n°5 :

1) On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels

$$\text{que : } \begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

a) Vérifier que 239 est solution de ce système.

b) Soit N un entier relative solution de ce système.

Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

c) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

d) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

e) Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \pmod{221}$ et $\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$

2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

a) Existe-t-il un entier naturel k tel que $10k \equiv 1 \pmod{17}$?

b) Existe-t-il un entier naturel k' tel que $10k' \equiv 18 \pmod{221}$?

Exercice n°6 :

Il s'agit de résoudre dans \mathbb{Z} le système : $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$

1) a) Démontrer qu'il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$ (on ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

b) Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S) .

2) a) Soit n_0 une solution de (S) , vérifier que le système (S) équivaut à : $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$

b) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$.

3) a) Trouver un couple $(u; v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2.b).