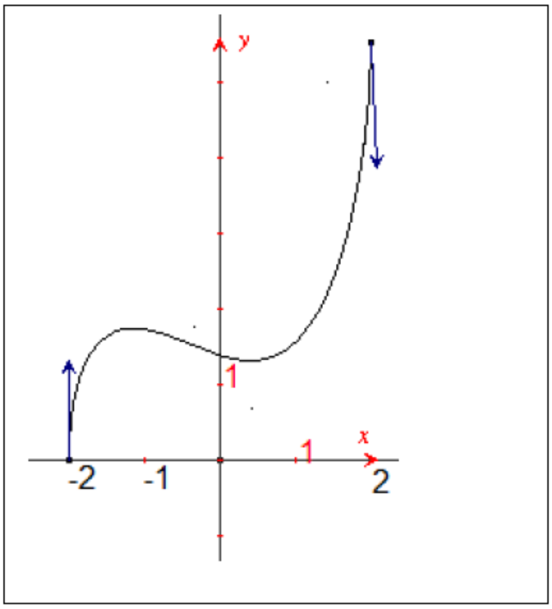
Lycée Jammel 3	*******Série 9*******	Mr :Afli Ahmed
$4^{\text{ème}}$M	Fonctions Réciproques	12/11/2014

Exercice 1:

Dans le graphique ci contre on a représenté dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) d'une fonction f définie sur $[-2,2]$ ainsi que les tangentes à (C) aux points d'abscisses -1 et $\frac{1}{2}$ et les demi-tangentes à (C) aux points d'abscisses -2 et 2



On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},2\right]$

1) Par une lecture du graphique (Sans justification) :

a) Déterminer $f'(-1)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2f(x)-11}{2x-4}$

b) Justifier que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle K à préciser

2) Répondre par **VRAI ou FAUX** (Sans justification)

a) f réalise une bijection de $[-2,2]$ sur $\left[0,\frac{11}{2}\right]$

b) Le domaine de dérivabilité de g^{-1} est l'intervalle $\left]\sqrt{2},\frac{11}{2}\right]$

c) Le tableau de variation suivant est celui de la fonction g^{-1}

x	$\sqrt{2}$	$\frac{11}{2}$
$(g^{-1})'(x)$	|| +	0
g^{-1}	$\frac{1}{2}$ ↗	2

Exercice 2:

On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$

1) a) Etudier les variations de f.

b) En déduire que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[\frac{1}{2},+\infty[$.

c) Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(\frac{2}{3})$.

2) Tracer, dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2},+\infty[$ et que pour tout $x\in]\frac{1}{2},+\infty[$ on a:

$(f^{1})'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{2x-1}}$

Exercice 3:

On considère la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}]$ et calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) En déduire que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0,1]$

3) a) Calculer $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ puis $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$; $(f^{-1})'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0.

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation: $f(x) = \frac{1}{n}$ admet, dans $]0, \frac{\pi}{4}]$, une solution unique a_n. Calculer a_1

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

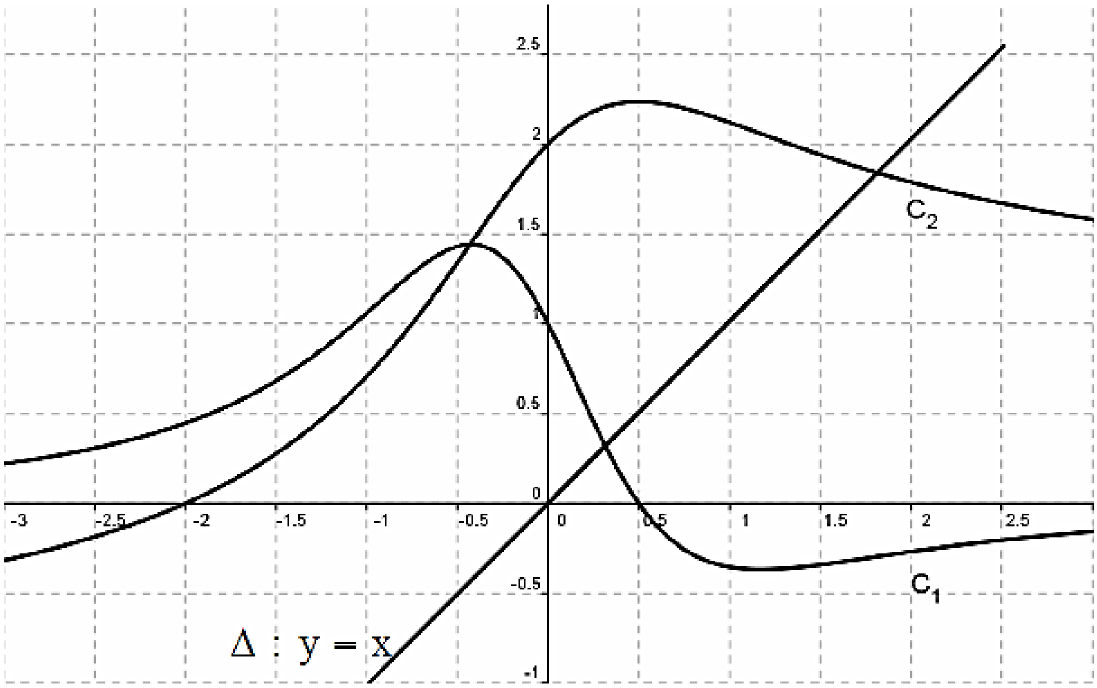
Exercice 4:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $g(x) = f(\tan x))$.
   (a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]1, +\infty[$.
   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $\forall x \in]1, +\infty[$: $\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{-2x}{1 + (x^2 - 1)^2}$.
3. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(x) = g^{-1}\left(\sqrt{1 + \sqrt{x}}\right) + g^{-1}\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}\right)$.
   (a) Mintrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\varphi'(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et déduire que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, ona : $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.
4. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $\mathcal{V}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} g^{-1}(k)$.
   (a) Montrer que $g^{-1}(2n) \leq \mathcal{V}_n \leq g^{-1}(n)$.
   (b) En déduire que $(\mathcal{V}_n)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5: (travail à la maison)

Dans la figure ci-dessous, C_1 et C_2 sont les courbes representatives d'une fonction f définie sur [-3,3] et de sa fonction dérivée f '.



L'élève utilisera le graphique ci-dessus comme source des données.

1./Justifier que C_1 ne peut pas être la courbe de f.

2./Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-2}{x}$

3./Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]\frac{3}{2}, 2[$ une solution unique α.

4. / Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

- a./Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$
- b./ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
- c./En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$ .Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$