Lycée Jammel 3	**Série 2**	Mr :Afli Ahmed
$4^{ème}$M	**Nombres Complexes+Limites-Continuité**	22/09/2014

Exercice 1:

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et (E_θ) : $z^2 - 2z - 2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

1./ a)Montrer que : $1 + 2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_θ)

2./ On donne $f(z) = z^3 - 4z^2 + 2(2 - i\sin\theta e^{i\theta})z + 4i\sin\theta e^{i\theta}$

a) Calculer f(2)

b) Montrer que : $f(z) = (z-2)(z^2 + bz + c)$ où b et c deux nombres complexes à déterminer

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : f(z)=0

3./ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0 ; \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives : 2 , $1 - e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$

a. Déterminer la forme exponentielle de z_B et z_C

b. Montrer que OBAC est un rectangle

c. Déterminer θ pour que OBAC soit un carré

Exercice 2:

Dans le plan complexe est P rapporté à un repère orthonormé (O;u,v) on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où a est un nombre complexe différent de 1 .

On désigne par ζ le cercle de centre O et de rayon 1 .

Soit f l'application définie par : $f : P \backslash\{B\} \to P$, M(z) →M'(z') telle que **z' =** $\boldsymbol{\frac{z-a}{z-1}}$

1°/ Montrer que les affixes des points invariants par f sont solutions de l'équation : **(E): $\boldsymbol{z^2 - 2z + a = 0}$**

2°/ On suppose que **a = 1 +** $\boldsymbol{e^{2i\theta}}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b. Mettre chacune de solutions de (E) sous forme exponentielle.

3°/On note M' et M'' les points d'affixes respectives $1 + ie^{i\theta}$ et $1 - ie^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

a. Déterminer et construire les ensembles décrits par M' et M lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

b. Montrer que pour tout $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$, le triangle OM'M'' est rectangle en O .

c. Déterminer θ dans $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ pour que le tringle OM'M'' soit isocèle .

4°/Dans cette partie on suppose que a = -1.

a. Montrer que (u,BM)+ (u,BM')≡ 0[2π]. En déduire que la demi-droite [BA) est une bissectrice de l'angle (BM,BM').

b. Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si z = 1 .

c. En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

➢ Exercice 3:

Soit la fonction f définie sur IR par f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x\in\left]-\infty,1\right[\\ \sqrt{x^2+3}-1 & \text{si } x\in\left[1,+\infty\right[\end{cases}$

On désigne par (ξ) la courbe représentative de f sur un repère orthonormée $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1) a) Vérifier que pour tout $x\in\left]-\infty,1\right[$; $\dfrac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$

b) En déduire que la droite d'équation y = 1 est une asymptote à (ξ) au voisinage de $-\infty$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que f est continue sur IR

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution α dans $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$

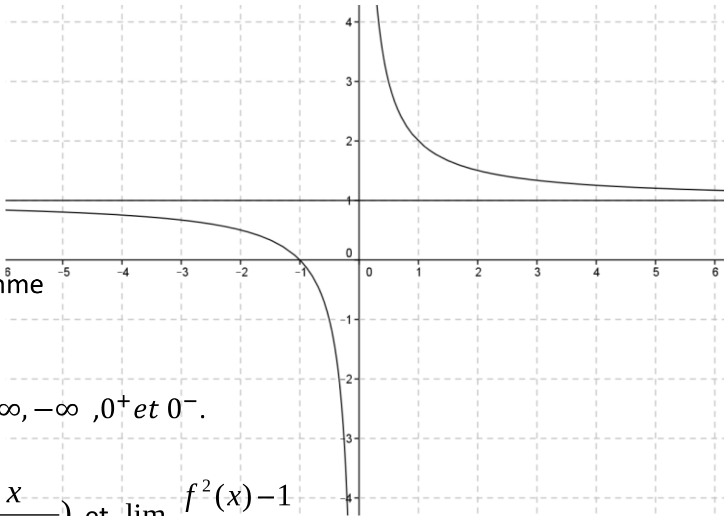
c) Vérifier que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$

4) Soit la fonction g définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = $f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

a) g admet-elle une limite à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$?

b) Vérifier que g est continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

➢ Exercice 4:



La courbe ci-dessus est celle d'une fonction f définie sur IR*, elle admet la droite D: y =1 comme asymptote au voisinage de $+\infty et -\infty$ et D' : x =0 comme asymptote verticale.

1./a.Déterminer graphiquement les limites de f en $+\infty, -\infty$,$0^+ et\ 0^-$.

b. Calculer ces limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^2(x)-1}{f(x)-1}$

2./Soit la fonction définie sur IR par g(x) = $\begin{cases} f(x)\, si & x\succ 1 \\ x^3+2x-1 & si \quad x\leq 1 \end{cases}$

a. Montrer que g est continue 1.

b. Monter que l'équation g(x) =0 admet dans $\left]-\infty,1\right]$ une unique solution α puis vérifier que 0< α <1.

3)./Déterminer l'image de]$-\infty$, 0[par la fonction composée gof.