*************	**Sujet de Révision P(17)**	Monastir
$4^{ème}$M		Bac 2014
Mr :Afli Ahmed		Similitude + conique arithmetique+E.fonction+suite

➢ Exercice 1:

Soit $(\Gamma)=\left\{M(z) \text{ tel que } \left|z-9+i(\bar{z}-9)\right|=2\sqrt{2}\left|z-4-i\right|\right\} z=x+iy$

1) Soient A,B et C les points d'affixes $z_A=1+2i,\ z_B=-3i$ et $z_C=2-3i$.
   a) Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en C. Déterminer l'application complexe associé à la similitude S et préciser ses éléments caractéristiques.
   b) A tout point M d'affixe z = x + iy , S(M)=M' d'affixe z'=x'+iy'.
   i) Exprimer z' en fonction de z. Quel est la similitude réciproque S' de S ?
   ii) En déduire l'expression de x et y en fonction de x' et y'.
2) a) Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) est : $3x^2+3y^2-2xy-14x+10y-13=0$.
   b) Montrer que l'image de (Γ) par S est la courbe (Γ') d'équation : $2x^2+y^2-8x+2y+1=0$.
   c) En déduire que (Γ') est une ellipse dont on précisera son centre, son excentricité, ses sommets et ses foyers puis le tracer.
3) En déduire la nature de (Γ) et la construire.

➢ Exercice 2:

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On note A et B les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (6 ; 1).
Pour tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, on note M' l'image du point M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et $(x'\,;\,y')$ ses coordonnées.

1.
1. Justifier l'existence de deux nombres complexes a et b tels que, pour tout point M d'affixe z, l'affixe z' du point M' est donnée par $z'=a\bar{z}+b$.
2. En utilisant les points A et B, démontrer que $\begin{cases} 1 & = & a+b \\ 6+\mathrm{i} & = & a(6-\mathrm{i})+b \end{cases}$
3. En déduire que, pour tout nombre complexe z : $z'=\dfrac{1}{13}(12+5\mathrm{i})\bar{z}+\dfrac{1}{13}(1-5\mathrm{i})$.
4. Établir que, pour tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, les coordonnées $(x'\,;\,y')$ du point M' sont telles que : $x'=\dfrac{1}{13}(12x+5y+1)$ et $y'=\dfrac{1}{13}(5x-12y-5)$.

2. On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ sont des entiers relatifs et tels que le point M' associé appartienne à l'axe des abscisses.
1. Justifier que $M(x\,;\,y)$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $5(x-1)=12y$.
2. En déduire que $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(1+12k\,;\,5k)$ où k est un entier relatif.

3. Dans cette question, on suppose que les coordonnées de M sont des entiers relatifs et que l'abscisse de M' est un entier relatif.
1. Démontrer que $x\equiv 5y+1\quad[13]$.
2. En déduire que $5x-12y-5\equiv 0\quad[13]$ et que l'ordonnée de M' est un entier relatif.

4. Déterminer les points M de la droite d'équation $x=2$ tels que les coordonnées du point M' soient des entiers relatifs.
On pourra montrer que l'ordonnée y d'un tel point est un entier relatif et utiliser des congruences modulo 13.

➢ Exercice 3 :

A) Soit f une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -y + 1$.

1) Montrer que :

(pour tout réel x , $f'(x) = f(x) - f^2(x)$) si et seulement si ($\frac{1}{f}$ est une solution de (E)).

2) Résoudre l'équation (E) puis déterminer f .

3) Déterminer la fonction f telle que : $f(0) = \frac{1}{2}$.

B) Dans toute la suite de l'exercice, on prend f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ et on désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Etudier les variations de f .

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

3) Pour tout entier naturel non nul n , on pose $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)\,dt$.

a) Montrer que $I_1 = -\ln\big(2(1-\alpha)\big)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - \alpha^n\right)$.

(ind : On pourra utiliser $f(x) - f^2(x) = f'(x)$)

c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante ; En déduire qu'elle est convergente.

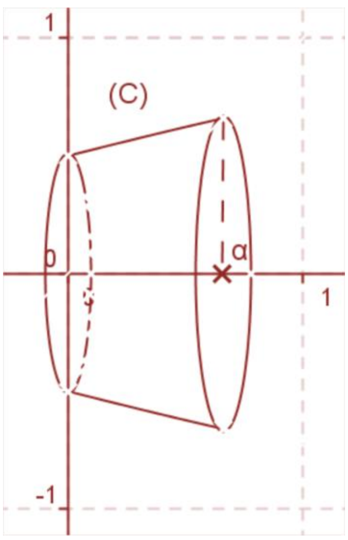
4) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $\frac{\alpha}{2^n} \leq I_n \leq \alpha^n$; En déduire la limite de (I_n) .

5) a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a :

$$I_n = -\ln\big(2(1-\alpha)\big) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right).$$

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$.

6) Le solide de révolution ci-dessous est obtenue par la Rotation de la courbe de f sur $[0, \alpha]$ autour de l'axe des abscisses.
Calculer son volume.



Exercice 4 :

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.

   À l'aide de la première partie, montrer que : $\quad S_n - \dfrac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n$.

4. Caiculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.
5. Étude de la convergence de la suite (u_n).
   - **a.** Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   - **b.** En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.
   - **c.** On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

     Montrer alors que $\dfrac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.