Lycée Jammel 3	Sujet de Révision E	Monastir
$4^{ème}$M		Bac 2014
Mr :Afli Ahmed		Divisibilité + espace +eq.diff+l.graphique

Exercice 1:

1.) Résoudre dans$\mathbb{Z}$: $15x \equiv 25(\text{mod}35)$.
2.) Résoudre dans$\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 \equiv 7(\text{mod}9)$.

Exercice 2:

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 7(\text{mod}8) \\ x \equiv 11(\text{mod}12) \end{cases}$

Exercice 3:

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + 31 + 31^2 + \cdots + 31^{n-1}$.

1) a) Montrer que : $S_{2013} - 31 \times S_{2012} = 1$.
   b) En déduire que 31 et S_{2013} sont premiers entre eux.
2) Montrer que Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $30 \times S_n = 31^n - 1$.
3) a) Montrer que $31^{2013} \equiv 1\ (mod\ S_{2013})$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence : $31x \equiv 1(mod\ S_{2013})$
4) Par la suite on admet que 2011 est premier.
   a) Montrer que si n est premier et $n \geq 7$ alors n divise $S_n - 1$.
   b) Déterminer le reste modulo 2011 du nombre S_{2013}.

Exercice 4:

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. on considère les points A(1,3,2), B(1,-1,-2) et C(2,4,1) .

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.

a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.

b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre[AB].

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ).

3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.

a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S'suivant un cercle (Γ ').

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ ') en un point E que l'on précisera.

Exercice 5:

On considère les équations différentielles :

$(E_0): (1+e^x)y' - y = 0$ et $(E): (1+e^x)y' - y = e^{2x}$

1) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ Montrer que g est une solution de (E) sur IR.
2) Soit f une fonction dérivable sur IR.

   Montrer que f est une solution de (E) si est seulement si $(f-g)$ est une solution de (E_0).
3) On pose $z = (1+e^x)y$
   a) Montrer que si y est une solution de (E_0) sur IR alors z est une solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.
   b) En déduire que les solutions de (E) sur IR sont les fonctions f définies par :$f(x) = \frac{ke^x+e^{2x}}{1+e^x}$; $k \in IR$.
4) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^{2x}-3e^x}{1+e^x}$ Etudier les variations de f.
5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$.
   a) Montrer que h réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Soit h^{-1} la fonction réciproque de h, expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
6) a) Tracer dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes de f et de h^{-1}.

   b) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \ln\left(3+x+\sqrt{x^2+10x+9}\right)dx$

Exercice 6:

Dans l'annexe ci-dessous est representée dans un repere orthonormé (O,i,j) , les courbes C_f et C_g des fonctions f et g définie ,derivable sur]-1,1[.T la tangente a C_f au point d'abscisse o

Les droites d'équations x=-1 et x=1 sont des asymptotes a C_f et a Cg

1) a) Determiner f(0) et f '(0)
   b) Determiner g'(0)
   c) Dresser le tableau de variation de g
2) Sachant que l'une des deux fonction est la fonction primitive de l'autre,determiner laquelle en justifiant votre choix
3) Justifier que f admet une fonction réciproque h définie sur IR
4) On suppose que h(x)= $\frac{e^x-1}{e^x+1}$ $\forall x \in IR$
   a) Verifier que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ $\forall x \in IR$
   b) Calculer alors $\int_0^1 h(x)dx$
5) Soit A l'aire de la partie du plan limité par les courbes (C_f) et (C_h) et les droites d'équation x=1 et y=1
   a) Montrer que A= 1-2 $\int_0^1 h(x)dx$
   b) En déduire A

Annexe : Exercice 6