Mr :Khammour.K **Année Scolaire** : 2013/2014	**Série n°8** : **Intégrale**	**Niveau :** 4ème Math

Rappel :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné I. Soient a et b deux réels de I. F est la primitive de f sur I.
On appelle intégrale de f a à b de f le nombre réel noté :

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}}$$

Propriétés :

- Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné I. Alors :
  $\int_a^a f(x)\ dx = 0$; $\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$ $\int_a^b\ dx = [x]_a^b = b - a$
- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
- **Positivité** :Si f est continue et positive sur [a,b] et $a < b$ alors : $\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$

Intégrale d'une égalité :

Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b] avec $a < b$ alors :

$f \leq g$ sur [a,b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Parité :

Soit f une fonction continue sur un intervalle symétrique [-a,a] :

- Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
- Si f est impair alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Intégration par partie :

Soit U et V deux fonctions dérivables sur [a,b] alors :

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{U(x).V'(x)\ dx = [U.V]_a^b - \int_a^b U'(x).V(x)\ dx}}$$

Théorème :

Soit f une fonction continue sur I et g une fonction continue sur J telle que $g(J) \subset I$ .Alors la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\ dt$ est dérivable sur J et $\mathbf{F'(x) = g'(x) \times f(g(x))}$

Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur [a,b] :On appelle valeur moyenne de f sur [a,b] le réel ,noté $\bar{f}$

$$\boxed{\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur [a,b] (a<b).Soit M et m deux réels ,si pour tout x de [a,b] $m \leq f(x) \leq M$ alors $m \leq \bar{f} \leq M$

Calcul d'aires :

Soit f une fonction continue et positive sur [a,b] .L'aire $\mathcal{A}$ du domaine définie par : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ est $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$

Exercice n°1 :

Calculer l'intégrale I :

1) $I = \int_0^2 \frac{dx}{(2+x)^2}$; 2) $I = \int_0^1 \frac{x}{(2+x^2)^2} dx$; 3) $I = \int_0^{\pi} \frac{2sinx}{(2+cosx)^3}$

4) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2x}$; 5) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{2x}{cos^2x^2} dx$; 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\, sin^3(x)\, dx$

Exercice n°2 :

Calculer au moyen d'intégration par partie, l'intégrale I.

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} xcos(3x)\,\mathrm{d}x$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

Exercice n°3 :

Soient I et J les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\pi} xcos^2x\,\mathrm{d}x$ et

$$J = \int_0^{\pi} xsin^2x\,\mathrm{d}x$$

1) Calculer I+J.
2) En déduire I et J.

Exercice n°4 :

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $\mathrm{f(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^3}$.

1) Monter que f dérivable sur $]-1,+\infty[$ et calculer sa fonction dérivée.
2) Soit U la suite définie sur IN par $\mathrm{U_n} = \int_0^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^3}$
a) Montrer que U est croissante.
b) Démonter les inégalités suivantes : $\mathrm{U_1} < 1$ et $\mathrm{U_n} < \int_0^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^3}$
c) En déduire que U est majoré et par suite ,convergente.

Exercice n°5 :

Pour tout n de IN , on considère la fonction $\mathrm{F_n}$ définie et dérivable sur [0,1[

par : $\begin{cases} \mathrm{F_0(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{1-\mathrm{t}}} \\ \mathrm{F_n(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{t^n}}{\sqrt{1-\mathrm{t}}}\mathrm{dt} \end{cases}$

1) a) Vérifier que pour tout n de IN , $\mathrm{F_n}$ définie et dérivable sur [0,1[.
b) Montrer que $\mathrm{F_n}$ est croissante sur [0,1[.

2) a) Calculer $F_0(x)$.

b) En déduire que pour tout x de [0,1[; $F_n(x) \leq 2$.

c) En déduire que $F_n(x)$ admet une limite à gauche de 1.On note I_n cette limite.

3) a) Vérifier que pour tout n∈IN* et pour tout x de [0,1[,on a :

$$F_n(x) - F_{n-1}(x) = -\int_0^x t^n\sqrt{1-t}\,dt$$

b) A l'aide d'une intégration par partie , prouver que pour tout n de IN* et pour tout x de [0,1[,on a :

$$F_n(x) = 2x^n\sqrt{1-x} + 2n\int_0^x t^{n-1}\sqrt{1-t}\,dt$$

d) Monter que pour tout n de IN* et pour tout x∈[0,1[, on a :

$$(2n+1)F_n(x) = 2x^n\sqrt{1-x} + 2nF_{n-1}(x)$$

4)a) Déduire que pour tout n de IN* $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$.

b) Calculer I_0, I_1 et I_2.

c) Montrer que pour tout n>0 : $I_n = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice n°6 :

1) Calculer pour tout réel x positif $I(x) = \int_0^x t\sqrt{1-t^2}\,dt$.

2) Soit la suite définie sur IN* par : $I_n(x) = \int_0^x t^n\sqrt{1-t^2}\,dt$.

a) Trouver une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n-2}(x)$.

b) Que devient cette relation pour $x = 1$?En déduire $I_{2p}(1)$ et $I_{2p+1}(1)$

Exercice n°7 :

Soit la fonction f définie par :$f(x) = 2\sqrt{x} - x$

1) Etudier la dérivabilité de f sur [0 ,1].Dresser son tableau de variations.
2) a)Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera .On note g sa fonction réciproque .

   b)Etudier la dérivabilité de de g sur J .
3) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
4) Expliciter g(x) pour tout x de J.
5) Calculer l'aire délimitée par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.