Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur$[-1,1]$ par f(x)=$\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1/ Montrer que f réalise une bijection de [-1,1] sur un intervalle J que l'on précisera.

2/ Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par g(x)=f(x)-x

a/ Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution sur $[-1,1]$

b/ Vérifier que $\alpha \in]\frac{2}{3}, 1[$

c/ En déduire que la droite Δ :y=x coupe la courbe C_f de f en un point unique

3/ Tracer les courbes C et C' respectives de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

4/ Montrer que pour tout x∈ J $\quad f^{-1}(x) = \frac{-2(x-1)}{\sqrt{(3x-2)(x-2)}+x}$

Exercice n°2 :

A/ Soit f la fonction définie sur [-1,1[par f(x)=$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que f est dérivable sur]-1,1[et que f'(x)= $\frac{1}{(1-x)^2 f(x)}$

b) Etudier la dérivabilité à droite de f en –1 et interpréter géométriquement le résultat obtenue

c) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 0

b) Vérifier que pour tout x∈[-1,1[;$f(x) - (x+1) = \frac{x^2 f(x)}{1+\sqrt{1-x^2}}$; en déduire que la courbe C_f est au dessus de T

c) Construire C_f et T

B/ Soit h la fonction définie sur]0,+∞ [par h(x)=$1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

1) a) Dresser le tableau de variations de h.

b) Montrer que l'équation h(x)=x admet dans]0,+∞ [une unique solution α et que α ∈]1,2[.

2) Soit U la suite définie par : : $\begin{cases} U_0 > 3 \\ U_{n+1} = h(U_n)\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $x \geq 1$; $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) Montrer que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°3 :

Dans le plan complexe P, on considère les points A, B, C et I d'affixes respectives 1-i , -2i 1-2i et $\frac{1}{2}$-2i et f de P\ {B} vers P qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z'=$\frac{-2iz+4+2i}{z+2i}$

1) a- Vérifier que pour tout z≠-2i on a : z'=$\frac{-2i(z-1+2i}{z+2i}$.

a- En déduire l'ensemble E= {M(z)/z' est réel}.

2) a- Montrer que pour tout z≠-2i on a (z'+2i)(z+2i)=2i

b-Montrer que BM'.BM=2 et que $\left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{BM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

c-En déduire que si $M\in C_{(B,1)}$ alors M' varie sur un cercle à préciser.

3) a- Montrer que [BA) est le bissectrice de $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})$.

b- Déterminer $f(C_{\left(I,\frac{1}{2}\right)})$.

c-Déterminer l'image par f de la droite $\Delta: y=x-2$ privé du point B.

Exercice n°4 :

Etant donné un réel $\theta\in]0,2\pi[$; On pose pour tout nombre complexe z

$$f_\theta(z)=z^2-\left(i+e^{i\theta}\right)z+(1+i)(-1+e^{i\theta})$$

1) a) Vérifier que $f_\theta(1+i)=0$.

b) En déduire les solutions z' et z'' dans **C** de l'équation $f_\theta(z)=0$.

2) Dans le plan complexe , rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A,B et M d'affixes respectives -1, $i\sqrt{3}$ et $-1+e^{i\theta}$

a) Montrer que lorsque θ varie dans $]0,2\pi[$ M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ qu'on précisera le rayon

b) Déterminer les valeurs de θ pour les quelles la droite (BM) est la tangente au cercle $\mathscr{C}$

Exercice n°5 :

ABCD est un carré de sens direct tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$,Δ est la médiatrice de [BC]

Soit f une isométrie qui est distincte de S_Δ tel que f(B)=C et f(D)=A

1) Montrer que le point O=B*D est un point invariant par f ;En déduire la nature et les éléments caractéristique de f
2) Soit g=foS_Δ et φ=$S_\Delta$of
   a) Chercher g(A) et g(C) ;En déduire que g=$S_{(AC)}$
   b) Montrer que φ=$S_{(BD)}$
   c) En déduire la nature de go φ