Liste d'exercices : Fonctions Logarithmes

***Exercice* 1 :**

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 1+\dfrac{3+3lnx}{x}$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.Interpréter graphiquement ces résultats.
   b) Montrer que $f'(x) = -\dfrac{3lnx}{x^2}$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et que $0,32 < \alpha < 0,34$.
   b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   c) Tracer (C_f) .

***Exercice* 2 :**

Dans l'exercice on désigne par e le réel tel que $lne = 1$; on a ainsi $ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$.

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2lnx \ si \ x > 0 \\ \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Montrer que f est continue à droite en 0 .
   b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat .
2. Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.Déterminer la nature de la branche infinie de ζ.
3. a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$; $f'(x) = -4xlnx$.
   b) Dresser le tableau de variation de f .
   c))Déterminer les abscisses des points d'intersections de ζ avec l'axe $(o, \overrightarrow{i})$.
4. Construire ζ dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
5. Soit λ un réel tel que : $0 < \lambda < \sqrt{e}$.
   a) En utilisant une intégration par partie montrer que $\displaystyle\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2lnx \,dx = \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 ln(\lambda) + \frac{1}{18}e\sqrt{e}$.
   b) Soit $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \sqrt{e}$ .Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$.
   c) Montrer que $\lim_{\lambda\to 0^+} \mathscr{A}(\lambda) = \frac{2}{9}e\sqrt{e}$.

***Exercice* 3 :**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x+1}{2x+1} - lnx$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude $0,1$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $x \in]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2lnx}{x^2+x}$.

On note C sa courbe dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Etudier les limites de f à droite en o et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.
   En déduire le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f et en déduire que $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.
4. Tracer C et préciser sa tangente à C au point d'abscisse 1.

***Exercice* 4 :**

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = xln(1+\frac{1}{x^2})\ si\ x > 0\ et\ f(0) = 0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique $2cm$).

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = ln(1+\dfrac{1}{x^2}) - \dfrac{2}{1+x^2}$.

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
2. Dresser le tableau des variations de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et que $0,5 < \alpha < 0,6$.
   Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.

Partie B

1. a) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$.
   b) En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$ on a $f'(x) = g(x)$. Dresser le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$.
2. Etude de f en 0.
   a) Montrer que $xln(1+\dfrac{1}{x^2})$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. Que peut on conclure ?
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
   c) Préciser la tangente à la courbe de f au point O.
   d) . Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
3. Donner l'allure de (C).

***Exercice* 5 :**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = ln(x+1) - x$.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$ et montrer que g strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que $0 < ln(x+1) < x$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + ln(\dfrac{x+1}{x-1})$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. a) Montrer que f est impaire.
   b) Calculer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
3. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ pour tout $x \in D_f$.
   b) Etudier les variations de f sur $]1;+\infty[$.
4. a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à C_f.
   b) Etudier le signe de $ln(\dfrac{x+1}{x-1}$. (**Indication** : $\dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$).
   c) Etudier la position relative de C_f rapport à Δ.
5. Tracer C_f dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (**Indication** : $\sqrt{3} \simeq 1,7$ et $f(\sqrt{3}) \simeq 3$).
6. a) Montrer que $\displaystyle\int_2^4 ln(\frac{x+1}{x-1})\,\mathrm{d}x = 5ln5 - 6ln3$ (**Indication** : faire une intégration par parties).
   b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$, $x = 4$ et $y = x$.