

Résumé : Dérivabilité

Niveau : Bac sciences techniques

Réalisé par : Prof. Benjeddou Saber

Email : saberbjd2003@yahoo.fr

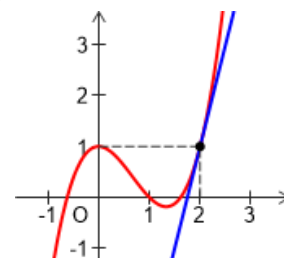
Définition : "Dérivabilité en un point"

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable en x_0** , si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivée** de f en x_0 , on le note $f'(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en x_0 de I , alors sa courbe représentative admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une tangente de coefficient directeur (ou pente) $f'(x_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \left(\frac{1}{f'(x_0)} \right)$. Une équation cartésienne de cette tangente est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



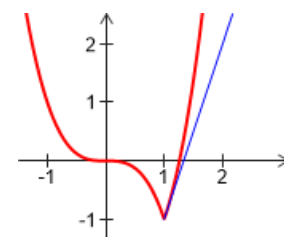
Définition : "Dérivabilité à droite"

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable à droite en x_0** , si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivée à droite** de f en x_0 , on le note $f'_d(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé à droite :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable à droite en x_0 de I , alors sa courbe représentative admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \left(\frac{1}{f'_d(x_0)} \right)$. Une équation cartésienne de cette demi-tangente est : $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $x \geq x_0$.



Définition : "Dérivabilité à gauche"

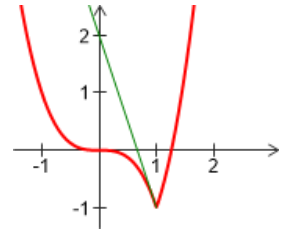
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable à gauche en x_0** , si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivée à gauche** de f en x_0 , on le note $f'_g(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé à gauche :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable à gauche en x_0 de I , alors sa courbe

représentative admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{1}{f'_d(x_0)}\right)$. Une équation cartésienne de cette demi-tangente est : $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $x \leq x_0$.



Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Théorème :

Si une fonction f est dérivable en un réel x_0 , alors elle est continue en x_0 .

Définition : " Approximation affine "

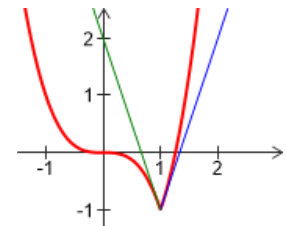
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $x_0 \in I$.

Pour h voisin de 0, le réel $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une **approximation affine** (valeur approchée) de $f(x_0 + h)$ en x_0 . On écrit : $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.

Définition : "Point anguleux"

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors le point $M(x_0, f(x_0))$ est un **point anguleux**.



Tangentes verticales

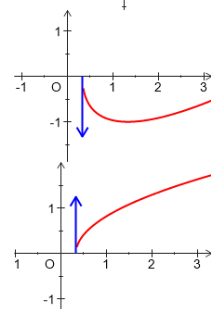
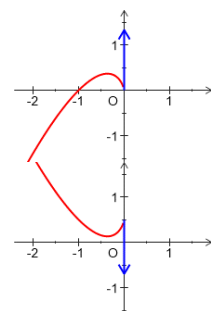
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$, alors la courbe représentative de f admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente dirigée vers le haut.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, alors la courbe représentative de f admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente dirigée vers le bas.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$, alors la courbe représentative de f admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente dirigée vers le bas.

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, alors la courbe représentative de f admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente dirigée vers le haut.



Définition : "Fonction dérivée"

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I .
 On appelle fonction dérivée de f et on note f' , la fonction qui à tout réel $x \in I$, associe le nombre dérivé $f'(x)$, de f en x .

Définition : "Dérivabilité sur un intervalle "

- Une fonction définie sur un intervalle ouvert I est dérivable sur I ($]a, b[$, $]a, +\infty[$ ou $] -\infty, b[$) si elle est dérivable en tout réel de I .
- Une fonction est dérivable sur $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b .
- Une fonction est dérivable sur $[a, b[$ (resp. sur $[a, +\infty[$) si elle est dérivable sur $]a, b[$ (resp. $]a, +\infty[$) et à droite en a .
- Une fonction est dérivable sur $]a, b]$ (resp. sur $] -\infty, b]$) si elle est dérivable sur $]a, b[$ (resp. $]a, +\infty[$) et à gauche en b .

Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x) =$	$f'(x) =$
a (constante)	0
$x^n, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt{ax + b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$
$\operatorname{tg}(ax + b)$	$a[1 + \operatorname{tg}^2(ax + b)] = \frac{a}{\cos^2(ax + b)}$
$\operatorname{cotg}(ax + b)$	$-a[1 + \operatorname{cotg}^2(ax + b)] = -\frac{a}{\sin^2(ax + b)}$

Opérations sur les fonctions dérivées :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit a un réel.

Fonction	Fonction dérivée
au	au'
$u + v$	$u' + v'$
$u \cdot v$	$u'v + uv'$
u^n	$n u' u^{n-1}$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Définition : " Dérivée seconde "

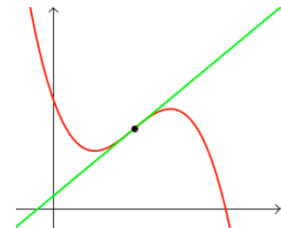
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée.

Si la fonction f' est dérivable sur I , alors f est dite **deux fois dérivable** sur I et la fonction dérivée de f' , notée f'' , est appelée la **fonction dérivée seconde** de f .

Définition : " Point d'inflexion "

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel x_0 de I .

Le point $M(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de la courbe C_f de f si C_f traverse sa tangente en ce point.



Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

Si f'' s'annule et change de signe en x_0 , alors le point $M(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f .

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe, alors le point $M(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f .

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Définition : "Extremum"

Soit f une fonction définie sur un intervalle sur un ensemble D .

m et M sont deux réels.

- M est le **maximum** (absolu ou global) de f sur D , si et seulement si, $f(x) \leq M$ pour tout $x \in D$ et s'il existe un réel $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) = M$.
- m est le **minimum** (absolu ou global) de f sur D , si et seulement si, $f(x) \geq m$ pour tout $x \in D$ et s'il existe un réel $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) = m$.
- Un maximum ou un minimum s'appelle aussi un **extremum**.
- Si m ou M est un extremum de f sur un intervalle ouvert $I \subset D$, on dit que m ou M est un **extremum local** de f sur D .

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

- Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 et change de signe, alors f admet un extremum local en x_0 égal à $f(x_0)$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit g une fonction définie sur $f(I)$.

Soit $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Corollaire 1 :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et g est une fonction dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$ pour tout $x \in I$.

Corollaire 2 :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction \sqrt{f} est dérivable sur I et $(\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ pour tout $x \in I$.

Théorème des accroissements finis :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

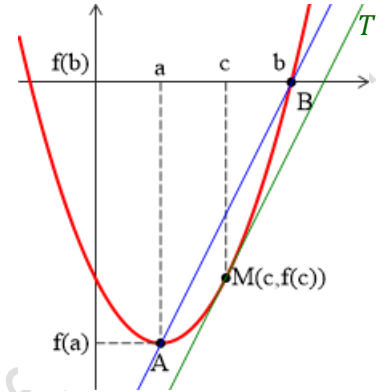
Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Interprétation graphique :

- Le réel $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f en son point d'abscisse c .
- Le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Donc $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Leftrightarrow T \parallel (AB)$.

Ainsi, le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c soit parallèle à la droite (AB) .



Inégalités des accroissements finis :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$ on ait $m \leq f'(x) \leq M$, alors pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a :

$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M.$$

Corollaire :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe un réel $k > 0$ tels que pour tout $x \in I$ on ait $|f'(x)| \leq k$, alors pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$$