Résumé : *Isométries du plan*
Niveau : *Bac mathématiques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*
Email : saberbjd2003@yahoo.fr

Définition : *"Isométrie du plan"*

Une application du plan dans lui-même est une **isométrie** si elle conserve les distances.
C'est-à-dire, si $M'N' = MN$ pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N'.

Conséquences :

- L'identité du plan, les translations, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries.
- Les images de deux points distincts du plan par une isométrie sont deux points distincts.

Théorème :

Une application du plan dans lui- même est une isométrie, si et seulement si, elle conserve le produit scalaire.

Une application f est une isométrie, si et seulement si, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C'.

Corollaire :

Soit f une isométrie du plan.
Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts, d'images respectives A', B' et C', alors $B\hat{A}C = B'\widehat{A'}C'$.
On dit qu'une isométrie conserve les mesures des angles géométriques.

Conséquence :

Les images par une isométrie de trois points non alignés sont trois points non alignés.

Théorème :

Soit f une isométrie, A, B et C trois points non alignés du plan et A', B' et C' leurs images respectives par f.

Si le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est orthonormé alors le repère $\left(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ est orthonormé. De plus, pour tout point M d'image M', $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec x et y réels implique $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$.

Théorème :

Une isométrie f est une bijection du plan dans lui-même.

L'application du plan dans lui-même qui à tout point N du plan associe son unique antécédent M par f est une isométrie appelée réciproque de f et notée f^{-1}.

Théorème :

Pour toute isométrie f et tout point M, $f(M) = N$, si et seulement si, $f^{-1}(N) = M$.

La réciproque d'une symétrie orthogonale est elle même.

La réciproque d'une symétrie centrale est elle même.

La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

La réciproque d'une rotation de centre I et d'angle α est la rotation de centre I et d'angle $-\alpha$.

Théorème :

Soit f une isométrie et A, B, C et D des points d'images respectives A', B', C' et D' par f.

Si $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{C'D'}$ où α est un réel.

Théorème :

- Une isométrie conserve le barycentre de deux points. En particulier une isométrie conserve le milieu d'un segment.
- L'image d'une droite par une isométrie est une droite.
- L'image d'un segment par une isométrie est un segment qui lui est isométrique.
- Les images de deux droites parallèles par une isométrie sont deux droites parallèles. (On dit qu'une isométrie conserve le parallélisme).
- L'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme.
- Les images de deux droites perpendiculaires par une isométrie sont deux droites perpendiculaires. (On dit qu'une isométrie conserve l'orthogonalité).
- L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle qui lui est isométrique.
- L'image par une isométrie de la tangente en un point M à un cercle est la tangente au cercle image, au point M' image de M. (On dit qu'une isométrie conserve le contact.)

Théorème :

La composée de deux isométries est une isométrie.

Théorème :

La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation.

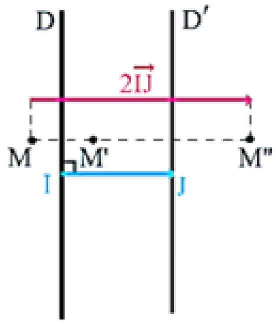
Plus précisément, si D et D' sont deux droites sécantes en un point I et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ et si S_D et $S_{D'}$ sont les symétries orthogonales d'axes respectifs D et D', alors $S_{D'} \circ S_D$ est la rotation de centre I et d'angle α où $\alpha \equiv 2\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{u'}}\right)[2\pi]$.

Conséquence :

La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires D et D' en I est la symétrie centrale de centre I, et dans ce cas $S_D \circ S_{D'} = S_{D'} \circ S_D$.

Théorème :

La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation.
Plus précisément, si D et D' sont deux droites parallèles et si S_D et $S_{D'}$ sont les symétries orthogonales d'axes respectifs D et D', alors $S_{D'} \circ S_D$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$, où I est un point de D et J est le projeté orthogonal de I sur D'.



Théorème :

Soit f et g deux isométries.

$g = f^{-1}$, si et seulement si, $f \circ g = Id$, où Id désigne l'identité du plan.

Propriété :

Si f et g sont deux isométries, alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Propriété :

Soit f, g et h trois isométries.

$f = g$, si et seulement si, $h \circ f = h \circ g$.

Théorème :

Soit f une isométrie différente à l'identité, A un point non fixe de f et A' son image par f.

Alors les points fixes de f, s'ils existent, se trouvent sur la médiatrice du segment $[AA']$.

Théorème :

Une isométrie fixe trois points non alignés, si et seulement si, c'est l'identité du plan.

Théorème :

Si deux isométries f et g coïncident sur trois points non alignés, alors elles coïncident partout dans le plan.
On dit qu'une isométrie est déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images.

Théorème :

Si une isométrie fixe deux points distincts A et B, alors elle fixe tous les points de la droite (AB).

Théorème :

Si une isométrie f fixe deux points distincts A et B et si elle est différente de l'identité, alors f est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

Théorème :

Si une isométrie f fixe un unique point I alors f est une rotation de centre I et d'angle non nul.

Théorème :

Soit O un point du plan. Alors toute isométrie f se décompose de manière unique en la composée d'une translation et d'une isométrie g qui fixe O.

Théorème :

Une isométrie qui n'a aucun point fixe est soit une translation de vecteur non nul, soit la composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ.

Définition : *"Symétrie glissante"*

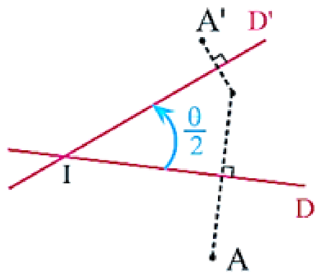
La composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ est appelée **symétrie glissante**.

Théorème :

Toute isométrie se décompose en au plus trois symétries orthogonales.

Théorème :

Toute rotation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants .
Plus précisément, soit r une rotation de centre I et d'angle θ et D une droite quelconque passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Alors $r = S_{D'} \circ S_D$, où D′ est la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u'}$ tel que $2(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

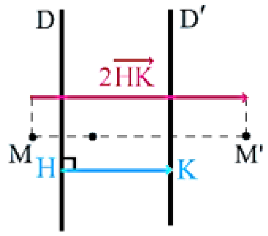


Conséquence :

Soit S_I la symétrie centrale de centre I et D une droite passant par I.
Alors $S_I = S_{D'} \circ S_D = S_D \circ S_{D'}$, où D' est la droite perpendiculaire à D en I.

Théorème :

Toute translation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.
Plus précisément, soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul $\vec{u}$,
D une droite quelconque de direction orthogonale à celle de $\vec{u}$ et H est un point de D. Alors $t_{\vec{u}} = S_{D'} \circ S_D$, où D′ est la droite parallèle à D et passant par le point K tel que $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\vec{u}$.



Nature de l'isométrie	**Décomposition en symétries orthogonales**	**Ensembles des points fixes**
Identité du plan	$S_D \circ S_D$	Tout le plan
Symétrie orthogonale d'axe D	S_D	La droite D
Rotation de centre I et d'angle θ, θ ≠ k2π ; k ∈ ℤ	$S_D \circ S_{D'}$ $(D \cap D' = \{I\})$	$\{I\}$
Translation de vecteur non nul	$S_D \circ S_{D'}$ $(D \cap D' = \emptyset)$	L'ensemble vide
Symétrie glissante d'axe D et de vecteur $\vec{u}$	$S_D \circ S_{D'} \circ S_{D"}$ $(D \cap D' = \emptyset)$ et $D \perp D"$	L'ensemble vide

La composée d'une rotation et d'une translation est une rotation.