NOMBRES COMPLEXES : METHODES

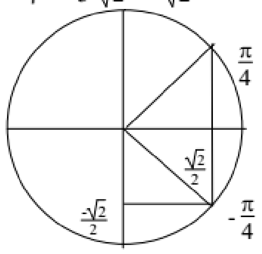
Comment calculer module et argument ?

Exemple : z = 3 – 3 *i.*

$\left| z \right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9}\ \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$

$\text{Cos } \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ On peut dire $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{4}$ à 2π près.

$\text{Sin } \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ NEGATIF donc $\theta = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$



donc $z = [\,3\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\,] = 3\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$

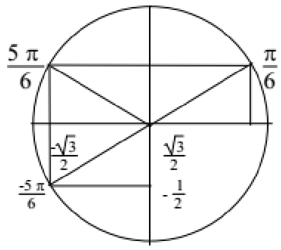
Exemple : z = - 3 – $\sqrt{3}$ *i.*

$\left| z \right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = \sqrt{4}\ \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$

$\text{Cos } \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ On sait que, ou on lit sur le formulaire que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On peut donc dire $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{-5\pi}{6}$ à 2π près.

$\text{Sin } \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$ NEGATIF donc $\theta = = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi$

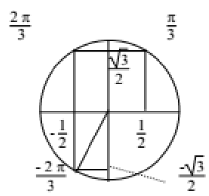


donc $z = [\,2\sqrt{3}, \frac{-5\pi}{6}] = 2\sqrt{3}\ e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Comment passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique ?

$\rho\, e^{i\theta} = [\rho, \theta] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\cos\theta + i\ \rho\sin\theta$

exemple $2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\,(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}) = 2\,(-\frac{1}{2} + i\ \frac{-\sqrt{3}}{2}) = -1 - i\sqrt{3}$



Comment ajouter deux nombres complexes ?

Il faut obligatoirement la forme algébrique.

Exemple $(2+3i)+3(-2-5i) = 2+3i-6-15i = -4-12i.$

Exemple $5e^{i\frac{2\pi}{3}}+3e^{i\frac{-\pi}{6}} = 5(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})+3(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}) =$

$$5(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+3(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i) = -\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+i(\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2})$$

Comment multiplier deux nombres complexes ?

On peut utiliser les deux formes , mais si on a la forme trigonométrique, les calculs seront plus simples.

Exemple : $(3+4i)(5-2i) = 15-6i+20i-8i^2 = 15+14i+8 = 23+14i$

$$5e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 10e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6})} = 10e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (=10(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) = 10\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,10\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}+5\sqrt{2}\,i.$$

Comment diviser deux nombres complexes ?

On peut utiliser les deux formes , mais si on a la forme trigonométrique, les calculs seront plus simples.

Exemple : $\frac{(3+4i)}{(5-2i)} = \frac{(3+4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{15+6i+20i+8i^2}{25-4i^2} = \frac{15+26i-8}{25+4} = \frac{7+26i}{29} = \frac{7}{29}+\frac{26}{29}i.$

Exemple $\frac{5e^{i\frac{\pi}{12}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{5}{2}e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6})} = 2{,}5\ e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Comment résoudre une équation du second degré ?

exemple $3z^2+4z+1=0.$

$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times3\times1 = 16-12 = 4$ $\quad\Delta > 0$ donc 2 solutions réelles

$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{4}}{2\times3} = \frac{-4+2}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\times3} = \frac{-4-2}{6} = -\frac{6}{6} = -1$ $\quad\boxed{S = \{-\frac{1}{3};-1\}}$

exemple $-3z^2+4z-2=0.$

$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times(-3)\times(-2) = 16-24 = -8$ $\quad\Delta < 0$ donc 2 solutions complexes conjuguées

$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4+i\sqrt{8}}{2(-3)} = \frac{-4+i\times2\sqrt{2}}{-6} = \frac{-2+i\sqrt{2}}{-3} = \frac{2-i\sqrt{2}}{3}$

$z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4-i\sqrt{8}}{2(-3)} = \frac{-4-i\times2\sqrt{2}}{-6} = \frac{-2-i\sqrt{2}}{-3} = \frac{2+i\sqrt{2}}{3}$ $\quad\boxed{S = \{\frac{2-i\sqrt{2}}{3};\frac{2+i\sqrt{2}}{3}\}}$

exemple $z^2-6z+9=0$

$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4\times1\times9 = 36-36 = 0$ donc une solution double $z = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times1} = \frac{6}{2} = 3.$

$\boxed{S = \{3\}}$

comment calculer une longueur, un angle dans un repère orthonormal?

Si les points A,B,C ont pour affixes respectives z_A, z_B, z_C

pour calculer la longueur AB, on calcule le module de $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Pour calculer l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ on calcule l'argument de $\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

comment trouver l'image d'un point par une translation ou une rotation de centre O dans un repère orthonormal ?

exemple: A(3, 2) , $\vec{u}(2,-1)$ $\theta = \frac{\pi}{6}$

Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

$z_A = 3 + 2\,i$; $z_{\vec{u}} = 2 - i$; $z_{A'} = z_A + z_{\vec{u}} = 3 + 2\,i + 2 - i = 5 + i$.

donc A' a pour coordonnées (5 ; 1).

Soit B l'image de A par la rotation de centre θ.

la rotation est associée à la fonction définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z\,e^{i\theta}$ donc

$$z_B = z_A\,e^{i\theta} = (3 + 2\,i)\,e^{i\frac{\pi}{6}} = (3 + 2\,i)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = (3 + 2\,i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + 2\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{2}{2}i^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \sqrt{3}\,i - 1 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) + i\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$$

donc B a pour coordonnées $\left(3\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \,,\, \frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$

comment trouver la rotation de centre O qui transforme A en B dans un repère orthonormal ?

cette rotation , si elle existe, est associée à une application dans $\mathbb{C}$ de la forme $f(z) = z\,e^{i\theta}$.

donc si il existe une telle rotation, on doit avoir $z_B = z_A\,e^{i\theta}$ (B est l'image donc z_B est f(z)).

on doit donc avoir $\frac{z_B}{z_A} = e^{i\theta}$.

on calcule donc $\frac{z_B}{z_A}$, si le module est bien 1, on a bien une rotation de centre O dont l'angle est un argument de $\frac{z_B}{z_A}$.

exemple $z_A = 2 + 4\,i$; $z_B = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i}{2 + 4\,i} = \frac{(-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i)(2 - 4\,i)}{(2 + 4)(2 - 4\,i)} = \frac{-2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i + 6\sqrt{2}\,i - 12\sqrt{2}\,i^2}{4 - 16\,i^2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 10\sqrt{2}\,i}{4 + 16} = \frac{10\sqrt{2} + 10\sqrt{2}\,i}{20} = \frac{10\sqrt{2}}{20} + \frac{10\sqrt{2}}{20}i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

le module est $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$ on a bien une rotation de centre O.

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi$.

le point B est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.