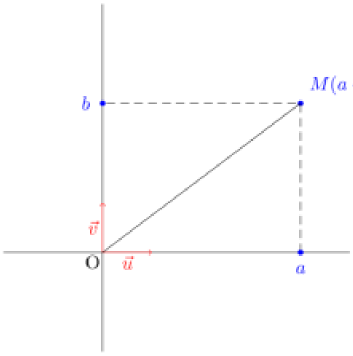
+

1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1.1 Rappels : affixe d'un point

Définition : Soit $(O;\vec{u};\vec{v})$ un repère orthonormé direct et z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
- Le point $M(a;b)$ est appelé image de z. (voir figure 1)
- On dit que M a pour affixe z.
- La distance OM est appelée module de z. On note $|z| = OM$.



Conséquences :

1. L'ensemble des nombres réels est représenté par l'axe des abscisses.
   L'ensemble des imaginaires purs est représenté par l'axe des ordonnés.
2. On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
3. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Propriété : Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a :
$$|z|^2 = z\bar{z}$$

Propriété : Affixe du milieu d'un segment
Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
On note I le milieu du segment $[AB]$.
Alors, l'affixe de I est :
$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

1.2 Affixe d'un vecteur

Définition : Soit $\vec{w}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
On appelle affixe de $\vec{w}$ le complexe $z = a + ib$.

Propriété 1 : Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a comme affixe $z_B - z_A$.

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

2.1 Argument d'un nombre complexe non nul

Définition : Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z (voir figure 2).
On appelle argument de z toute mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$. On le note $\arg(z)$. il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).
On a donc :

$$\arg(z) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$$

Remarques :

1. Si z est un réel, c'est-à-dire $z = a$:
   - si $a > 0$, $|z| = a$ et $\arg(z) = 0$
   - si $a < 0$, $|z| = -a$ et $\arg(z) = \pi$
2. Si z est un imaginaire pur, c'est-à-dire $z = ib$:
   - si $b > 0$, $|z| = b$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
   - si $b < 0$, $|z| = -b$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

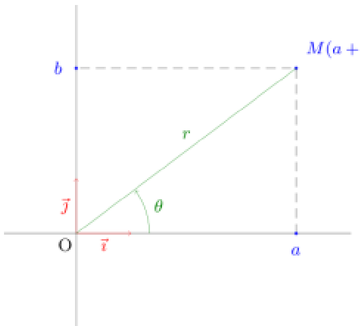


FIGURE 2 – Argument d'un nombre complexe

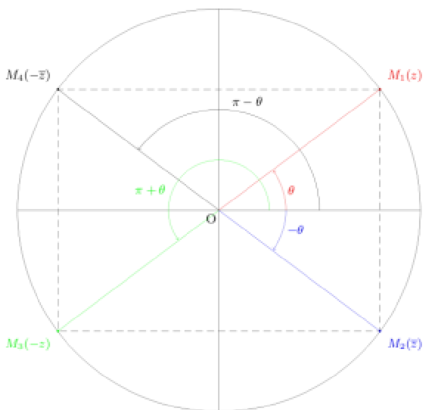
Propriété : Module et argument de l'opposé et du conjugué
Soit z un complexe non nul et M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives z, $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$.
Par des considérations géométriques simples sur la figure 3, on obtient :

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$$

$$\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z)\ [2\pi]$$



2.2 Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Théorème – Définition :
Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme suivante :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad \text{avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z)\ [2\pi]$$

Cette forme est appelée forme trigonométrique du complexe z.

Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique :
Soit z un complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$ et de forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Alors :

— Si l'on connaît r et θ :

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

— Si l'on connaît a et b :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

2.3 Égalité de deux nombres complexes

Propriété : Égalité de deux complexes
Les complexes $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r > 0$ et $r' > 0$ sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta'\ [2\pi] \end{cases}$$

2.4 Cas d'un produit ou d'un quotient

Propriété : Module et argument d'un produit et d'un quotient
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

$$|zz'| = |z| \times |z'| \qquad \text{et} \qquad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$$

1. Si n est un entier naturel non nul et z un complexe non nul :

$$|z^n| = |z|^n \qquad \text{et} \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$$

2. Si z un complexe non nul :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$$

3 Forme exponentielle d'un complexe non nul

Définition : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Remarque : « $e^{i\theta}$ » se lit « exponentielle de $i\theta$ ».

Exemples :

$e^{i0} = 1$ $\quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\quad e^{i\pi} = -1$ $\quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ $\quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Propriété : Soient θ et θ' deux réels.

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Propriété 2 : Formule de Moivre

Soit θ un réel et n un entier naturel. On a :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Remarque :

1. C'est une conséquence directe de la **Propriété 1**. Ce résultat se montre par récurrence sur n.
2. On a donc :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Propriété : Soient θ et θ' deux réels.
$e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ équivaut à $\theta = \theta'$ $[2\pi]$.

Définition : Tout nombre complexe z non nul, dont un argument est θ, peut s'écrire sous la forme : $z = |z|\, e^{i\theta}$;
Cette écriture est appelée forme exponentielle du complexe z.

4 Applications géométriques des nombres complexes

4.1 Distances et angles orientés

Théorème : Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

1. $AB = |z_B - z_A|$
2. Si $z_A \neq z_B$, $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)$

4.2 Caractérisation des cercles et des médiatrices

Propriété 1 : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon R.
Le point M d'affixe z est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $|z - \omega| = R$.

Théorème : Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
Si $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$:

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Remarques :

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ réel).
2. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ imaginaire pur).

Un cas particulier important : Si A, B et M sont trois points distincts d'affixes respectives a, b et z, alors $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right)$. Or, $\frac{b-z}{a-z} = \frac{z-b}{z-a}$ donc :

$$\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$