Exercice 1

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Etudier le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

c) Montrer que la suite U est convergente.

d) Déterminer la limite de la suite U.

2) Soit les suites V et S définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 1 - U_n$ et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{2}{5} V_n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$

d) Déterminer alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 2

Soit la suite réelle U définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$.

2) Montrer que la suite U est croissante.

3) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1) Montrer que la suite U est croissante.

2) Montrer que $\forall\, n \geq 1$ on a : $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

3) En déduire que la suite U n'est pas majorée.

4) Déterminer la limite de la suite U.

Exercice 4

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 0$; $V_0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3}$ et $V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}$

1) Calculer U_1 et V_1

2) Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

4) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

5) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = 9U_n + 5V_n$

a) Montrer que (W_n) est une suite constante.

b) En déduire la valeur de la limite commune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 5

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n+1}{2}}$

1) Dans cette question on suppose que $U_0 = \cos x$ où $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$

b) En déduire la limite de la suite (U_n).

1) Dans cette question on suppose que $U_0 \in]0, 1[$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{3U_n-1}{2U_n}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{2U_n-2}{2U_n-1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Retrouver la limite de U_n.

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$

c) Retrouver alors la limite de U_n.