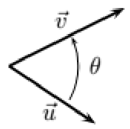
I - Expressions et propriétés du produit scalaire

1) Définitions

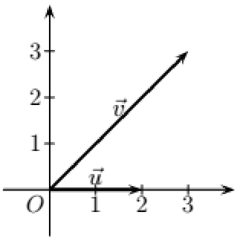
Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le nombre, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{u}\| \,.\, \cos(\vec{u}, \vec{v})$.



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{u}\| \,.\, \cos\theta$$

Si A, B et C sont trois points du plan, alors : $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}$

Exemple :



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 3\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} = 6$$

Propriétés
- *Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|$.*
- *Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\|$.*
- *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :*

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$$

Attention : A la différence du produit entre nombres réels, on n'a pas $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ **!**

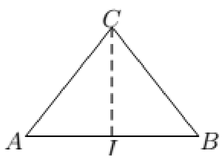
Définition et notation : Pour tout vecteur $\vec{u}$, on note $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|u\|^2$.
$\vec{u}^2$ est le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$.

2) Propriétés du produit scalaire

Propriété *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout nombre réel k :*
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\vec{u}\cdot\vec{v}$

Exemples :
- $2\vec{u}\cdot(\vec{v} - 3\vec{w}) = 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 6\vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \cdots$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \cdots$
- $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \cdots$

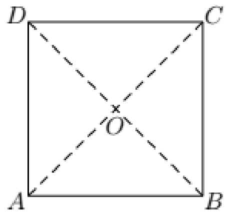
Exercice 1
ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. I est le milieu de $[AB]$.
Calculer les produits scalaires : a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$ c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BI}$



Exercice 2

$ABCD$ est un carré de côté 2 cm de centre O.
Calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$ d) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DC}$



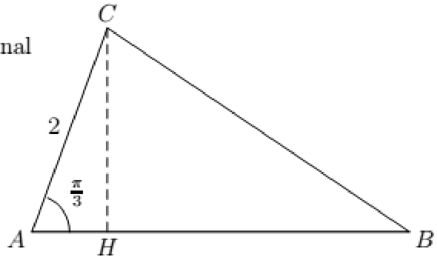
Exercice 3

Dans le triangle ABC ci-contre, H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
On donne de plus $AC = 2$, $AB = 4$, et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$.

a) Calculer AH.

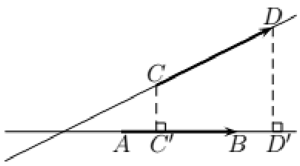
b) Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

c) Que remarque-t-on ?



3) Projection orthogonale

Propriété *Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs, et C' et D' les projetés othogonaux de C et D sur la droite (AB) ; alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.*

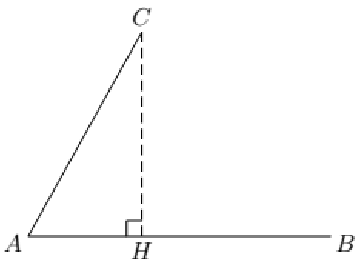


$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$$

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB).

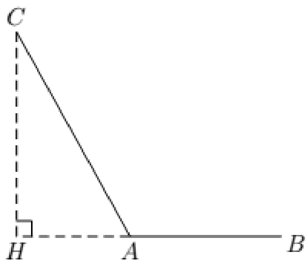
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC$$

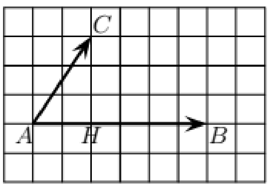


Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire :

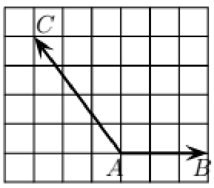
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$$



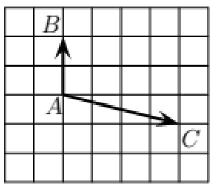
Exercice 4



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \ldots$

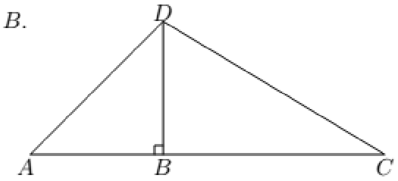


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \ldots$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \ldots$

Exercice 5 ABD est un triangle rectangle isocèle en B.
L'angle $\widehat{BCD}$ mesure 30° et $AB = 3$.

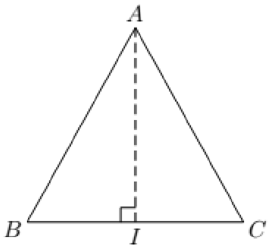


1. Calculer les longueurs AD, CD et BC.
2. Déterminer les produits scalaires suivants :

   a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$

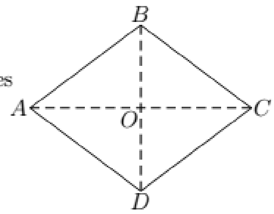
Exercice 6
ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que $AB = 2,5$ cm et $BC = 3$ cm. I est le milieu de $[BC]$.

Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ de deux manières différentes, et en déduire la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ à $0,1$ degré près.



Exercice 7 $ABCD$ est un losange de centre O dont les diagonales mesurent $AC = 4$ cm et $DB = 3$ cm.

Calculer une valeur approchée de l'angle $\widehat{DAC}$ à $0,1$ près.



4) Expression du produit scalaire à l'aide des normes uniquement

On a : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$.
Or, $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et de même, $\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

Ainsi, $2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$, et donc,

Propriété *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$.

Exercice 8 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

5) Produit scalaire et coordonnées

Propriété *Soit dans un repère orhonormal $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$ les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Exercice 9 Dans un repère orthonormal $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants, et en déduire une valeur de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ à $0,1$ degré près.

a) $\vec{u}(1;-2)$ et $\vec{v}(6;5)$ b) $\vec{u}(-2;4)$ et $\vec{v}\left(3;\dfrac{1}{2}\right)$ c) $\vec{u}(\sqrt{2};-2)$ et $\vec{v}(\sqrt{2};1)$

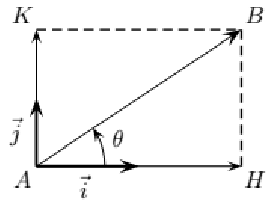
Exercice 10 On se place dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Dans chacun des cas, déterminer la valeur de m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
a) $\vec{u}\,(m;5)$ et $\vec{v}\,(1;-4)$ b) $\vec{u}\,(2m;1)$ et $\vec{v}\,(3;2)$ c) $\vec{u}\left(\dfrac{m}{2};2\right)$ et $\vec{v}\,(3;-1)$ d) $\vec{u}\,(m;3)$ et $\vec{v}\,(m;-4)$

Exercice 11 Dans un un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(-3;1)$, $B(4;-1)$ et $C(1;15)$.
Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?

II - Décomposition d'un vecteur sur deux axes orthogonaux

On considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ selon les axes $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ (ou $(A;\vec{i})$, $(A,\vec{j})$) revient à projeter orthogonalement le point B sur chacun de ces deux axes.



On obtient $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AK}$

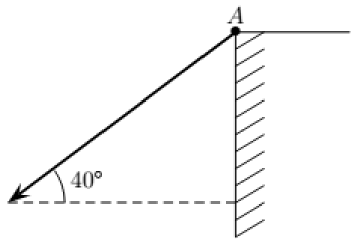
avec, $AH=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i}=AB\cos\theta$

et $AK=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{j}=AB\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=AB\sin\theta$

En résumé, on a : $\overrightarrow{AB}=\underbrace{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\vec{i}\right)}_{=AH}\vec{i}+\underbrace{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\vec{j}\right)}_{=AK}\vec{j}$

Exercice 12 Une personne tire sur une corde attachée au sommet d'un mur vertical avec une force de 200 N suivant un angle de 40° avec l'horizontale.

Déterminer la décomposition de cette force sur des axes horizontaux et verticaux, et calculer l'intensité de chacune de ces forces.



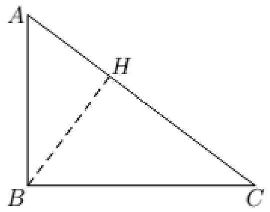
III - Exercices

Exercice 13 Le plan est rapporté à un RON $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
On considère les points $A(1;-1)$, $B(3;3)$, $C(-4;4)$, $D(2;1)$, $E(17;12)$ et $F(5;-12)$.

1. Montrer que $(AB)\perp(CD)$.
2. Montrer que $(AB)//(EF)$.

Exercice 14 ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB=3$ cm et $BC=4$ cm.
On appelle H le projeté orthogonal de B sur (AC).

Calculer la longueur AH
(on pourra utiliser le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$).



Exercice 15 Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(2;-1)$, $B(3;2)$ et $C(0;-2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.