Exercice 1 :

On donne θ_0 un réel tel que : $\cos(\theta_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants (en fonction de θ_0) :

$a = 3i(2+i)(4+2i)(1+i)$ et $b = \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$

Exercice 2 :

Mettre sous la forme $a + ib, a, b \in \mathbb{R}$ (forme algébrique) les nombres complexes

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}; \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2; \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

$$z_4 = \frac{5+2i}{1-2i}; \quad z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3; \quad z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

$$z_7 = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}; \quad z_8 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}; \quad z_9 = \frac{1+2i}{1-2i}$$

Exercice 3 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$z_1 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}; z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}; z_3 = 3e^{-\frac{7i\pi}{8}}; z_4 = \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right);$$

$$z_5 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}; z_6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right); z_7 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}$$

z_8, le nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

z_9 le nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

Exercice 4 :

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants, ainsi que leur conjugués :

$$z_1 = 3+3i; \quad z_2 = -1-i\sqrt{3}; \quad z_3 = -\frac{4}{3}i; \quad z_4 = -2; \quad z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}, \qquad \theta \in]-\pi, \pi[$$

Pour z_5, factoriser par $e^{\frac{3i\theta}{2}}$

$$z_6 = 1+i; \quad z_7 = 1+i\sqrt{3}; \quad z_8 = \sqrt{3}+i; \quad z_9 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}; \quad z_{10} = 1+e^{i\theta}, \qquad \theta \in]-\pi, \pi[$$

Pour z_{10}, factoriser par $e^{\frac{i\theta}{2}}$

2. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leur conjugués.

$$z_1 = 1+i(1+\sqrt{2}); \quad z_2 = \sqrt{10+2\sqrt{5}} + i(1-\sqrt{5}); \quad z_3 = \frac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i}; \quad z_4 = \frac{1}{1+i\tan(\theta)}$$

Indication :

Ecrire z_1 sous la forme $\alpha(e^{i\theta} + e^{2i\theta})$

Calculer z_2^5

3. Calculer

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$$

Exercice 5 :

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.
3. Quotient du nombre complexe de modulo 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 6 :

Etablir les égalités suivantes :

1.
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$
2.
$$(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$$
3.
$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

Exercice 7 :

Soit

$$u=1+i \quad \text{et} \quad v=-1+i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de u et v.
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Exercice 8 :

Calculer le module et un argument de

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v=1-i$$

En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Exercice 9 :

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$z_1=\frac{1+i}{1-i};z_2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3;z_3=(1+i\sqrt{3})^4;z_4=(1+i\sqrt{3})^5+(1-i\sqrt{3})^5;$$
$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i};z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$$

Exercice 10 :

Calculer les racines carrées des nombres suivants.

$$z_1=-1;z_2=i;z_3=1+i;z_4=-1-i;z_5=1+i\sqrt{3};$$
$$z_6=3+4i;z_7=7+24i;z_8=3-4i;z_9=24-10i$$

Exercice 11 :

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 - (5i + 14)z + 2(5i + 12) = 0$.
3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.
4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$.
5. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.
6. $4z^2 - 2z + 1 = 0$.
7. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
8. $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.
9. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$.
10. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$.
11. $z^3 + 3z - 2i = 0$.
12. $z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0$.
13. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$.
14. $(1 + i)z^2 - (3 + i)z - 6 + 4i = 0$.
15. $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$.
16. $(1 + 3i)z^2 - (6i + 2)z + 11i - 23 = 0$.