
 **Les différents ensembles de nombres**

- $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
- Dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $x + 1 = 0$  n'a pas de solution.  
Cette équation a une solution notée  $-1$ , cette solution est un élément de l'ensemble  $\mathbb{Z}$ .
- $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs. C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.  
 $\mathbb{Z}$  contient  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{N}$  est contenu dans  $\mathbb{Z}$ , ce que l'on note  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .
- Dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $2x = 1$  n'a pas de solution.  
Cette équation a une solution notée  $-\frac{1}{2}$ , cette solution est un élément de l'ensemble  $\mathbb{Q}$ .
- $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des nombres rationnels.  
C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{Z}^*$ .  $\mathbb{Q}$  contient  $\mathbb{Z}$ . On a donc  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .
- Dans  $\mathbb{Q}$  l'équation  $x^2 = 2$  n'a pas de solutions.  
Cette équation a deux solutions notées  $\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$ , ces solutions sont des éléments de l'ensemble  $\mathbb{R}$ .
- $\mathbb{R}$  est l'ensemble des nombres réels. C'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite.  
 $\mathbb{R}$  contient  $\mathbb{Q}$ . On a donc  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .
- Dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 = -1$  n'a pas de solutions.  
Cette équation a deux solutions notées  $i$  et  $-i$ , ces solutions sont des éléments de l'ensemble  $\mathbb{C}$ .
- $\mathbb{C}$  est l'ensemble des nombres complexes.  
C'est l'ensemble des nombres de la forme  $a + bi$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .  
 $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$ . On a donc  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

## I.B Définitions

### I.B.1 Forme algébrique

 **Définition 1:**

Il existe un ensemble noté  $\mathbb{C}$ , appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$  contient l'ensemble des nombres réels.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .
- Tout nombre complexe  $z$  s'écrit de manière unique  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels.  
L'écriture  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels est appelée forme algébrique du nombre complexe  $z$ .

$x$  est la partie réelle de  $z$ , notée  $Re(z)$ ,  $y$  est la partie imaginaire de  $z$  notée  $Im(z)$ .

**Remarque :**  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels :

Si  $y = 0$ , le nombre complexe est réel.

Si  $x = 0$ , le nombre complexe est dit imaginaire pur.

**THÉORÈME 1**

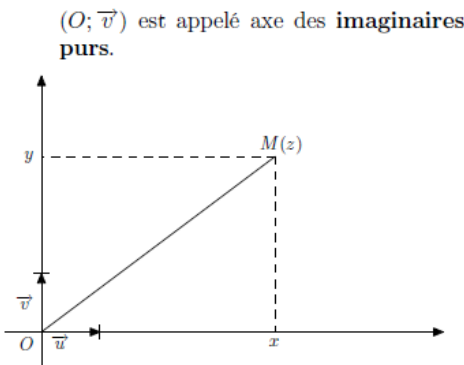
Soit  $x, y, x'$  et  $y'$  des nombres réels,  
 $x + iy = x' + iy'$  équivaut à  $x = x'$  et  $y = y'$ .  
 $x + iy = 0$  équivaut à  $x = 0$  et  $y = 0$ .

Cela signifie qu'un nombre complexe s'écrit de manière unique sous forme algébrique.

### I.B.2 Représentation graphique

$(O; \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormal direct du plan.

1. A tout nombre complexe  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réel, on associe le point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$ . On dit que  $M$  est le point image de  $z$  et que  $\vec{OM}$  est le vecteur image de  $z$ .
2. Tout point  $M(x; y)$  est le point image d'un seul complexe  $z = x + iy$ . On dit que  $z$  est l'afixe du point  $M$  et du vecteur  $\vec{OM}$ .
3. Le plan est alors appelé plan complexe.
4. L'axe des abscisses  $(O; \vec{u})$  est appelé **axe des réels**, l'axe des ordonnées



### I.C Opérations sur les nombres complexes

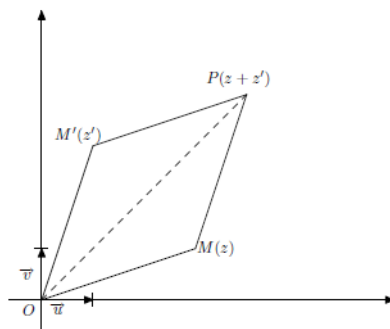
#### I.C.1 Addition et multiplication

**Définition 2:**

Soit  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ( $x, y, x'$  et  $y'$  réels).  
 La somme de  $z$  et de  $z'$  est le complexe  $z + z' = (x + x') + i(y + y')$ .  
 Le produit de  $z$  et de  $z'$  est  $z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$ .  
 En effet  $z.z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y + iy'x + i^2yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$ .

**Remarque :** Les identités remarquables sont valables dans  $\mathbb{C}$ . On a alors pour tous  $z$  et  $z'$  complexes,  
 $z^2 + z'^2 = z^2 - i^2 z'^2 = (z - iz')(z + iz')$ .

**Remarque :** Soient  $M$  d'afixe  $z$  et  $M'$  d'afixe  $z'$  des points du plan complexe.  
 $z + z'$  est l'afixe du point  $P$  tel que  $OMPM'$  est un parallélogramme.



Affixe d'un vecteur, d'un barycentre

**PROPOSITION 1:**

Deux points  $A$  et  $B$  du plan complexe ont pour affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ .  
L'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est  $z_B - z_A$ .

Remarque : Si  $\lambda$  est un réel, l'affixe de vecteur  $\lambda \overrightarrow{u}$  est  $\lambda z$  où  $z$  est l'affixe de  $\overrightarrow{u}$ .

**PROPOSITION 2: Interprétation barycentrique**

Deux points  $A$  et  $B$  du plan complexe ont pour affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ .  
L'affixe du barycentre  $G$  des points pondérés  $(A, \alpha)$  et  $(B, \beta)$  ( $\alpha + \beta \neq 0$ ) est :  $\frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$ .

dem : On a  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB})$  et le résultat en découle en passant aux affixes.

**On peut généraliser cette propriété :**

$(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$  sont  $n$  points du plan, d'affixes respectives  $z_1, z_2, \dots, z_n$   
tels que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ . Alors leur barycentre  $G$  a pour affixe la moyenne pondérée de leurs affixes :  $z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$ .

Il en résulte que l'affixe  $z_I$  du milieu  $I$  du segment  $[AB]$  est  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$  et celle du centre de gravité  $G$  d'un triangle  $MNP$  est  $z_G = \frac{z_M + z_N + z_P}{3}$ .

I.C.2 Inverse d'un nombre complexe non nul

**THÉORÈME 2**

Tout nombre complexe non nul  $z$ , écrit sous forme algébrique  $z = x + iy$ , admet un inverse, noté  $\frac{1}{z}$ , et :  $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ .

En effet, on remarque que pour tout nombre complexe non nul  $z = x + iy$ ,  $(x + iy)(x - iy) =$

$$x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2.$$

On a alors  $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$

### I.C.3 Nombre conjugué

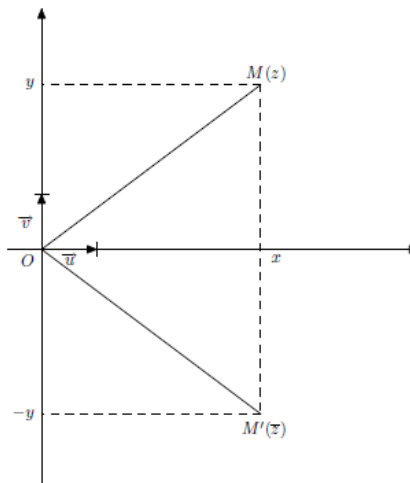


#### Définition 3:

Soit  $z$  un nombre complexe,  $z = x + iy$ .

Le **nombre conjugué** de  $z$ , noté  $\bar{z}$ , est le nombre complexe  $x - iy$ .

Dans le plan complexe, le point  $M'$  d'affixe  $\bar{z}$  est l'image du point  $M$  d'affixe  $z$



par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



#### PROPOSITION 3:

$z$  est un nombre complexe.

1.  $z$  est réel équivaut à  $\bar{z} = z$ .
2.  $z$  est imaginaire pur équivaut à  $\bar{z} = -z$ .

dem : On pose  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  réels :

1. Si  $z$  est réel, alors  $y = 0$ , donc  $z = \bar{z}$ .  
Si  $z = \bar{z}$ , alors  $x + iy = x - iy$ , donc  $2iy = 0$  et on en déduit que  $y = 0$  ce qui signifie que  $z$  est réel.
2. Si  $z$  est imaginaire pur, alors  $x = 0$ , donc  $z = -\bar{z}$ .  
Si  $z = -\bar{z}$ , alors  $x + iy = -x + iy$ , donc  $2x = 0$  et  $x = 0$ .  $z$  est donc bien un imaginaire pur.

**Propriétés du module**

Pour tous nombres complexes  $z \in \mathbb{C}$  et  $z' \in \mathbb{C}$  :

1.  $|\bar{z}| = |z|$
2.  $|-z| = |z|$
3.  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  (inégalité triangulaire)
4.  $|zz'| = |z||z'|$
5.  $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ,  $z' \neq 0$
6.  $\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$  ( $z \neq 0$  si  $n \in -\mathbb{N}$ )

### I.D Argument d'un nombre complexe non nul

**Définition 5:**

$z$  est un nombre complexe non nul d'image  $M$ ,  $z = x + iy$  ( $x$  et  $y$  réels). Une mesure de l'argument de  $z$  est un nombre réel noté  $\arg(z)$  et défini par  $\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ .


**Propriétés de l'argument**

Pour tout nombre complexe  $z \neq 0$  :

1.  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
2.  $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
3.  $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
4.  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
5.  $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n \times \arg(z)$

Démonstration : On pourra écrire les formes trigonométriques de  $z$  et  $z'$  pour démontrer certaines de ces propriétés. (voir exercice fait en cours, et exercice ROC)

### I.E Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul


 **Définition 6: -Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul**  
 Pour tout nombre complexe  $z \neq 0$ , de module  $\rho$  et d'argument de mesure  $\theta$ , on pourra écrire :

$$z = \rho e^{i\theta}$$

 **PROPOSITION 6:**

1.  $|e^{i\theta}| = 1$
2.  $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
3.  $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
4.  $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
5.  $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
6.  $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$

### I.F Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations du second degré à coefficients réels

 **PROPOSITION 7:**  
 L'équation  $az^2 + bz + c = 0$  ( $a, b$  et  $c$  réels,  $a \neq 0$ ) admet des solutions dans  $\mathbb{C}$ .  
 Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant du trinôme.

1. Si  $\Delta = 0$  : une solution réelle égale à  $-\frac{b}{2a}$
2. Si  $\Delta \neq 0$  : deux solutions distinctes :
  - réelles si  $\Delta > 0$  :  $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  ;
  - complexes conjuguées si  $\Delta < 0$  :  $\frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $\frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Démonstration : La forme canonique du trinôme  $az^2 + bz + c$  ( $a, b$  et  $c$  réels,  $a \neq 0$ ) est

$$a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Si  $\Delta \geq 0$ , on retrouve les résultats vus en première.

Si  $\Delta < 0$ , alors  $-\Delta > 0$ . On pose  $\delta = -\Delta$ . On peut écrire  $\delta = (\sqrt{\delta})^2$

$$\text{On a alors : } az^2 + bz + c = a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{\delta}}{2a} \right)^2 \right] = a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - i^2 \left( \frac{\sqrt{\delta}}{2a} \right)^2 \right]$$

$$az^2 + bz + c = a \left( z + \frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{\delta}}{2a} \right) \left( z + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\delta}}{2a} \right).$$

Les solutions de l'équation sont donc  $-\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et

$$-\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{\delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

### I.G Interprétation géométrique



**PROPOSITION 8:**



Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ .  
Si on note  $Z = \frac{c-a}{b-a}$  alors  $\arg(Z) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  et  $|Z| = \frac{AC}{AB}$ .

Il est en effet évident que le module d'un quotient est égal au quotient des modules et  $|c-a| = AC$  et  $|b-a| = AB$ .

De même, l'argument d'un quotient est égal à la différence des arguments et on peut remarquer que :

$$\arg(c-a) - \arg(b-a) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB})$$

donc

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{u})$$

d'où

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$

**I.H Nombres complexes et transformations**

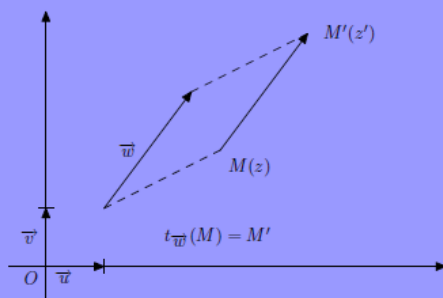
**I.H.1 Ecriture complexe d'une translation**



**PROPOSITION 9:**



$\overline{w}$  est un vecteur d'affixe  $b$ .  
L'écriture complexe de la translation de vecteur  $\overline{w}$ , qui transforme  $M(z)$  en  $M'(z')$  est  $z' = z + b$ .



**dem :**  $t$  est la translation de vecteur  $\overline{w}$  ;  $M' = t(M)$  équivaut à  $\overrightarrow{MM'} = \overline{w}$ , c'est à dire  $z' - z = b$  où  $z$  et  $z'$  sont les affixes respectives de  $M$  et  $M'$ .

**I.H.2 Ecriture complexe d'une rotation**

**PROPOSITION 10:**  
 $\Omega$  est un point d'affixe  $\omega$  et  $\theta$  un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle de mesure  $\theta$ , qui transforme  $M(z)$  en  $M'(z')$  est  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ .

$R$  est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle de mesure  $\theta$ ;  $M' = R(M)$  équivaut à  $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$  et  $\Omega M' = \Omega M$ .

On note  $z$  et  $z'$  les affixes respectives de  $M$  et  $M'$ , l'affixe de  $\overrightarrow{\Omega M'}$  est  $z' - \omega$ , celle de  $\overrightarrow{\Omega M}$  est  $(z - \omega)$ .

Donc  $M' = R(M)$  équivaut à  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ .

### I.H.3 Écriture complexe d'une homothétie

**PROPOSITION 11:**  
 $\Omega$  est un point d'affixe  $\omega$  et  $k$  un réel non nul. L'écriture complexe de l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$ , qui transforme  $M(z)$  en  $M'(z')$  est  $z' - \omega = k(z - \omega)$ .

$h$  est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$ ;  $M' = h(M)$  équivaut à  $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ .

On note  $z$  et  $z'$  les affixes respectives de  $M$  et  $M'$ , l'affixe de  $\overrightarrow{\Omega M'}$  est  $z' - \omega$ , celle de  $k\overrightarrow{\Omega M}$  est  $k(z - \omega)$ . Donc  $M' = h(M)$  équivaut à  $z' - \omega = k(z - \omega)$ .