Série n°2

DERIVABILITE
EQUATIONS A COEFFICIENTS COMPLEXES

4^e SC & $TECH$

Exercice 1 :

1. $a)$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (7+7i)z - 2 + 26i = 0$.

   $b)$ En déduire les solutions de l'équation : $z^4 - (7+7i)z^2 - 2 + 26i = 0$.

2. Soit $f(z) = z^3 - (6+7i)z^2 - (9-19i)z - 2 + 26i = 0$.

   $a)$ Vérifier que $f(-1) = 0$.

   $b)$ Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que : $f(z) = (z+1)(az^2 + bz + c)$.

   $c)$ Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

Exercice 2 :

1. Soit la fonction u définie sur IR par : $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

   $a)$ Déterminer la fonction dérivée u' puis dresser le tableau de variation de la fonction.

   $b)$ Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $1 < \alpha < 2$.

   $c)$ A l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement à 10^{-1} près de α.

   $d)$ En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

   $e)$ Tracer la courbe C_u de la fonction u dans repère orthonormé.

   $f)$ La courbe C_u admet-elle un point d'inflexion ? si oui, déterminer le.

2. Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$

   $a)$ Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

   $b)$ Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que : $f'(x) = \frac{u(x)}{(1+x^3)^2}$

   $c)$ Déterminer le signe de f' sur $]-1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f sur $]-1;+\infty[$

   $d)$ En remarquant que $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$, montrer que $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$

3. On donne les fonctions g et h définies respectivement sur IR et IR^* par :

$$g(x) = x(x-1) \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

   $a)$ Montrer que $g(x) - h(x) = \frac{u(x)}{2x}$ puis déterminer le signe de $g - h$ sur IR^*.

   $b)$ En déduire les positions relatives des courbes C_g et C_h représentatives des fonctions g et h.

Exercice 3 :

I Soit $P(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$, avec z un nombre complexe.

1. $a)$ Montrer que pour tout nombre complexe z, $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

   $b)$ En déduire que si z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$, alors $\overline{z_0}$ est aussi une solution.

2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines imaginaires pures.

II 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2+i)z + 2 - 2i = 0$.

2. $a)$ Déterminer les racines cubiques de $(-i)$ et de $2 + 2i$.

   $b)$ En déduire la résolution de l'équation : $z^6 - (2+i)z^3 + 2 - 2i = 0$

Exercice 4 :

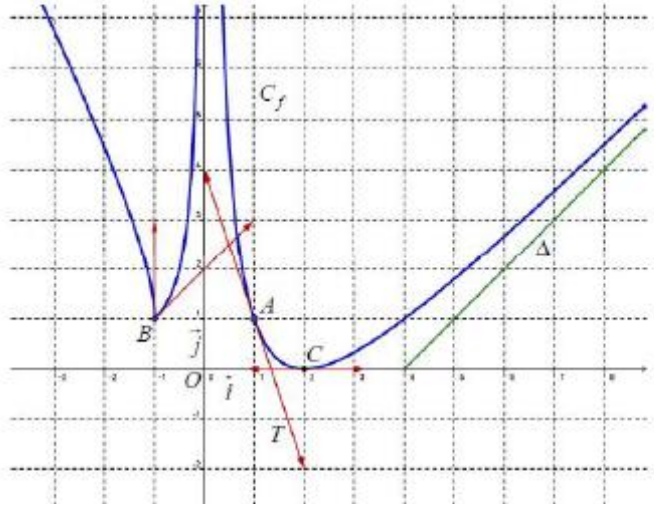
Sur la figure ci-contre, C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie IR sur tracée dans un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dont ;

$\Delta: y = x - 4$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

L'axe des ordonnés est asymptote à C_f.

T est une tangente à C_f au point A.

C_f admet deux demi-tangentes en B et une tangente Horizontale en C.



<u>Par une lecture graphique :</u>

1) Déterminer $\lim_{x\mapsto 0^+} f(x)$ $\lim_{x\mapsto +\infty}[f(x) - x]$, $f'(2)$, $f'(1)$ et $f'_d(-1)$.

2) Donner une approximation affine du réel $f(0{,}998)$

3) Déterminer $\lim_{x\mapsto -1^-} \frac{f(x)-1}{x+1}$

4) Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{f(x)} + x$

   $a)$ Montrer que $\lim_{x\mapsto 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$

   $b)$ Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de au point d'abscisse 1.

Exercice 5 _ On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x^2+2x-3}$, et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de C_f.

   Dans la suite de l'exercice, la fonction f sera étudiée sur $[-1;1[\cup]1;+\infty[$.
3. Déterminer les limites en 1 et la limites en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_f ?
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer C_f.

Exercice 6 _Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

1. Vérifier que f est définie sur $]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$.
2. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Montrer que la droite $D: x = -\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de f.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
4. Montrer que la droite $D' = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\propto$
5. Tracer C_f et construire les tangentes à C_f aux points O et $A(-1;0)$.
6. Soit g la restriction de f sur $[0;+\infty[$.

   $a)$ Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

   $b)$ Calculer $g(1)$ et en déduire $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

   $c)$ Déterminer l'expression de g^{-1} sur J.

Exercice

1. $a)$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(7+7i)z-2+26i=0$.

   $b)$ En déduire les solutions de l'équation : $z^4-(7+7i)z^2-2+26i=0$.

2. Soit $f(z)=z^3-(6+7i)z^2-(9-19i)z-2+26i=0$.

   $a)$ Vérifier que $f(-1)=0$.

   $b)$ Déterminer les nombres complexes $a, b\ et\ c$ tels que : $f(z)=(z+1)(az^2+bz+c)$.

   $c)$ Résoudre l'équation $f(z)=0$.