

Lycée Secondaire Ibn Charaf ◆◆◆ Devoir de contrôle n° 3	Épreuve : Mathématiques	
	Durée : 2 H	
	Coefficient : 3	
Section : 4^{ème} Sciences expérimentales 1&2	Année Scolaire : 2015-2016	Prof./ Maayoufi

Le sujet comporte deux pages numérotées de 1/2 à 2/2. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Le barème est approximatif.

Exercice 1 (4points)

Partie I :

Indiquer, en le justifiant, la réponse exacte :

- Soit les points A, B et C non alignés de l'espace \mathcal{E} . L'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ est :
 - Le plan passant par A et perpendiculaire à (AB)
 - La droite (AB)
 - $\{A; B\}$.
- L'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que : $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est :
 - le plan (ABC)
 - La droite $D(a, \vec{u})$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
 - (AB).
- Soit $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$ définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors :
 - $F'(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$
 - $F'(x) = 2 \sin x \cos x$
 - $F'(x) = \cos^2 x$.
- Soit $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $I=[e, e^2]$; la valeur moyenne de f sur I :
 - $\bar{f} = \frac{\ln 2}{e(e-1)}$
 - $\bar{f} = \frac{-1}{e-1}$
 - $\bar{f} = \frac{1}{e-1}$.

Partie II :

Répondre par **vrai** ou **faux** en **justifiant la réponse** :

- Si f est continue sur [a,b] alors $\bar{f} = \int_a^b |f(x)| dx$.
- La dérivée de la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \ln(2x^2+1)$ égale à $f'(x) = \frac{2}{2x^2+1}$.
- L'approximation affine de la fonction e^h pour h proche de 0 est h+1.
- Soit le plan $P: 2x - y + z - 2 = 0$ et soit les points A(-2,1,1) et B(2,-1,3) ; alors (AB) \perp P.

Exercice 2 (10points)

I/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\ln^2(x)-1}$.

- Étudier le signe de la fonction $g(x) = \ln^2(x)-1$.
 - Déterminer alors le domaine de définition de la fonction f.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow e} \left[\frac{\ln(x)-1}{x-e} \right]$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \left[\frac{\ln(x)+1}{x-\frac{1}{e}} \right]$.
 - Étudier la dérivabilité de f à droite en e, en précisant la demi-tangente à \mathcal{C}_f au point A(e,0)

c) Étudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{1}{e}$ et préciser la demi-tangente à \mathcal{C}_f au point $B\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

- 3) a) Dresser le tableau de variation de f .
 b) Étudier les branches infinies à \mathcal{C}_f ; puis tracer la courbe \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

II/ Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2-x)(1+e^x)$ et $g(x) = e^{-x} + x - 1$.

- 1) a) Étudier les variations de g . En déduire le signe de $g(x)$.
 b) Montrer que $f'(x) = -e^x \cdot g(x)$, puis dresser le tableau de variation de f .
 2) a) Montrer que la droite $D : y = -x + 2$ est une asymptote oblique à \mathcal{C}_f .
 b) Préciser la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à D .
 c) Tracer \mathcal{C}_f et D dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 3) Soit $m \in]-\infty; 2]$, $\mathcal{A}(m)$ désigne l'aire de la partie du plan limitée par \mathcal{C}_f , D ; et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = m$.
 Calculer $\mathcal{A}(m)$ en fonction de m . En déduire $\lim_{m \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(m)$.
 4) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
 b) Tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère.
 c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, D ; et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$.

Exercice 3 (6points)

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1, 0, 1)$, $B(1, 4, -1)$, $C(3, -4, -3)$ et $D(4, 0, 4)$.

- 1) a) Montrer que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
 b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
 2) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
 b) En déduire une équation du plan (ABC) .
 3) a) Calculer $d(O, (AB))$
 b) Calculer le volume \mathcal{V} du tétraèdre $ABCD$.
 4) Soit \mathcal{S} la sphère de diamètre $[AB]$.
 a) Former une équation de \mathcal{S} . I est le centre de cette sphère.
 b) Soit \mathcal{P} le plan d'équation : $x + y - z + 2 = 0$.
 Calculer $d(I, \mathcal{P})$. I est le centre de la sphère \mathcal{S} .
 c) Déterminer alors le centre H et le rayon r du cercle \mathcal{C} intersection de \mathcal{P} et \mathcal{S} .

Fin de l'épreuve