EXERCICE SUITE PROPOSE P AR Dr. AMINE TOUATI

ENONCE : Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur I = [0 ; + ∞[par $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{-x}$. On considère un réel a de I et on pose, pour tout entier naturel n, $I_n(a)=\int_0^a f_n(x)dx$.

1. Calculer $I_0(a)$.

2. a) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n entier naturel non nul : $f_n'(x)=f_{n-1}(x)-f_n(x)$ et $f_n(0)=0$.

b) En déduire que, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a)-I_{n-1}(a)=-\frac{a^n}{n!}e^{-a}$.

c) En déduire que, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a)=1-\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$.

3. Dans cette question, on pose a = 1. On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :
$u_n=1-\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}\right)e^{-1}=\int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, et pour tout x de [0 ;1] : $f_n(x)\le\frac{1}{n!}x^n$.

b) En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n : $0\le u_n\le\frac{1}{(n+1)!}$ puis la limite de u_n.

c) Déduire enfin que $e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}\right)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\dots$

CORRIGE : 1. $I_0(a)=\int_0^a e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^a=1-e^{-a}$ (car 0 ! = 1 et $f_0(x)=e^{-x}$).

2. a) Pour tout x de I et pour tout n entier naturel non nul, on a : $f_n'(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}+\frac{x^n}{n!}(-e^{-x})=f_{n-1}(x)-f_n(x)$ et $f_n(0)=0$.

b) D'où, pour tout n entier naturel non nul :
$I_n(a)-I_{n-1}(a)=\int_0^a(f_n(x)-f_{n-1}(x))dx=\int_0^a(-f_n'(x))dx=\left[-f_n(x)\right]_0^a=-\frac{a^n}{n!}e^{-a}$.

c) D'où, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a)=I_{n-1}(a)-\frac{a^n}{n!}e^{-a}=I_{n-2}(a)-\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}e^{-a}-\frac{a^n}{n!}e^{-a}=\dots=$
$I_0(a)-\left(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}=1-\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$.

3. a) Pour tout entier naturel n, et pour tout x de [0 ;1] : $0\le x\le 1$ entraîne $0\le e^x\le e$ entraîne $0\le e^{-x}\le e^{-1}<1$ et en multipliant les termes par la quantité positive $\frac{1}{n!}x^n$, on obtient $0\le f_n(x)\le\frac{1}{n!}x^n$.

b) Donc, en utilisant la propriété : si, sur [a, b] on a $f(x)<g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$; donc pour tout entier naturel n : $0\le u_n\le\int_0^1\frac{x^n}{n!}dx$; or $\int_0^1\frac{x^n}{n!}dx=\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1=\frac{1}{(n+1)!}$; on a, pour tout entier naturel n : $\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0$ puis, par le théorème des gendarmes, la limite de u_n est 0.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}\right)e^{-1})=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}\right)e^{-1})=1$ et donc
$e=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}\right)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\dots$ ce qui permet d'obtenir des approximations de e par des rationnels :
$e\approx\frac{1957}{720}$ à 10^{-3} près ; $e\approx\frac{685}{252}$ à 10^{-4} près ...