Exercice 1

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. On note encore s est la similitude directe telle que $s(\mathrm{O}) = \mathrm{A}$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{O}$. Soit Ω son centre.
   (a) Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].)
   En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
2. On désigne par $\mathcal{D}$ une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB).
   On note A' et B' les projetés othogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.
   (a) Déterminer les images des droites (BB') et $\mathcal{D}$ par la similitude s.
   (b) Déterminer le point $s(\mathrm{B}')$.
   (c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[\mathrm{A}'\mathrm{B}']$

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4\mathrm{i}$, $z_1 = -1 - 4\mathrm{i}$, $z_2 = -4 - \mathrm{i}$.

1. (a) Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(\mathrm{A}_0) = \mathrm{A}_1$ et $S(\mathrm{A}_1) = \mathrm{A}_2$.
   (b) Etablir que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}z + \dfrac{-3+\mathrm{i}}{2}$.
   (c) En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.
   (d) On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'.
   Vérifier la relation : $\omega - z' = \mathrm{i}(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.
2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}, est défini par $\mathrm{A}_{n+1} = S(\mathrm{A}_n)$ et on pose $u_n = \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.
   (a) Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Exprimer v_n en fonction de n.
   (b) La suite (v_n) est-elle convergente ?
4. (a) Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.
   (b) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n :
   si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

TS 1 avril 2009

Devoir de spécialité n° 5

I

① ⓐ $\left.\begin{array}{l} s(O)=A \\ s(B)=O \end{array}\right\} \Rightarrow$ l'angle de s vaut $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AO})$

$= -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

ⓑ $\left.\begin{array}{l} s(O)=A \\ s(\Omega)=\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = +\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

donc ΩOA rectangle en $\Omega \Rightarrow \Omega$ point du cercle de diamètre [OA].

on a de même $\left.\begin{array}{l} s(B)=O \\ s(\Omega)=\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega O}) = \frac{\pi}{2}$

donc $(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega O}) + (\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega B}) \quad (2\pi)$

$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi \quad (2\pi)$ donc $\Omega \in [AB]$

d'autre part $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi) \Rightarrow (\Omega O) \perp (AB)$ donc Ω pied de la hauteur issue de O du triangle OAB

② ⓐ • $\left.\begin{array}{l} B \overset{s}{\longmapsto} O \\ s \text{ d'angle } \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ l'image de (BB') est une droite perpendiculaire à (BB') passant par $s(B)=O$.

d'autre part B' projection orthogonale de B sur $\mathcal{D} \to (BB') \perp \mathcal{D}$ (et $O \in \mathcal{D}$)

d'où l'image de (BB') est la droite $\mathcal{D}$.

• $\left.\begin{array}{l} O \longmapsto A \\ O \in \mathcal{D} \\ s \text{ d'angle } \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ l'image de $\mathcal{D}$ est une droite passant par $s(O)=A$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

d'autre part A' projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D} \Rightarrow (AA') \perp \mathcal{D}$.

d'où l'image de $\mathcal{D}$ est (AA').

ⓑ $\left.\begin{array}{l} \text{B' est le point d'intersection de } \mathcal{D} \text{ et (BB')} \\ \text{s conserve l'intersection.} \\ \mathcal{D} \longmapsto (AA') \\ (BB') \longmapsto \mathcal{D} \end{array}\right\} \Rightarrow$ s(B') point d'intersect° de (AA') et $\mathcal{D}$

donc $s(B') = A'$

ⓒ On a donc $\left.\begin{array}{l} \Omega \longmapsto \Omega \\ B' \longmapsto A' \\ s \text{ d'angle } \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega B'}, \overrightarrow{\Omega A'}) = +\frac{\pi}{2} \ (2\pi) \Rightarrow \Omega A'B'$ rectangle en Ω

$\Rightarrow \Omega$ point du cercle de diamètre [A

(II) $A_0(5-4i)$, $A_1(-1-4i)$; $A_2(-4-i)$

1) a) $\left.\begin{array}{l} A_0 \neq A_1 \\ A_1 \neq A_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ par thm, il existe une unique similitude s telle que $s(A_0) = A_1$ et $s(A_1) = A_2$

b) s similitude directe, donc s a une écriture complexe de la forme

$z' = az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

ici on a donc $\begin{cases} -1-4i = a(5-4i) + b \\ -4-i = a(-1-4i) + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -1-4i = a(5-4i) + b \\ 3-3i = a(6+0i) \end{cases}$

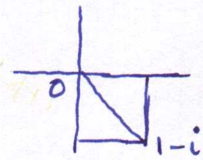
$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3(1-i)}{6} = \frac{1-i}{2} \\ b = -(1+4i) - \frac{1-i}{2}(5-4i) \end{cases}$

finalement, $b = -1-4i - \frac{1}{2}(1-9i)$
$= -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$ d'où s a pour écriture

$z' = \frac{1-i}{2} z - \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$

c) Le rapport de s est $\left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

l'angle de s est $\theta = \arg\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ (2π)



Soit $\Omega(\omega)$ le centre de s. Ω fixe donc

$\frac{1-i}{2}\omega - \frac{3}{2} + \frac{i}{2} = \omega \Longleftrightarrow \omega\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{-3+i}{2}$

$\Longleftrightarrow \omega = \frac{-3+i}{1+i} = \frac{(-3+i)(1-i)}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$

d) $M(z)$; $M'(z')$ avec $M \longmapsto M'$

donc $\omega - z' = -1+2i - \frac{1-i}{2}z + \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{1-i}{2}z = i\left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2} + \frac{1+i}{2}z\right)$

et $z - z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$ d'où on a bien $\omega - z' = i(z - z')$

On déduit que dans la rotat° de centre M' et d'angle $+\frac{\pi}{2}$, on a $r(M) = \Omega$

en particulier on a alors $M'M\Omega$ rectangle isocèle en M'.

2) a) voir figure.

b) $\left.\begin{array}{l} A_{n-1} \longmapsto A_n \\ A_n \longmapsto A_{n+1} \\ s \text{ de rapport } \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_{n-1}A_n \Longleftrightarrow u_n = \frac{\sqrt{2}}{2} u_{n-1}$

d'où (u_n) géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

③ ⓐ $v_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$.

(u_n) géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = u_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

et $u_0 = A_0A_1 = |-1-4i-5+4i| = 6$. $\Longrightarrow$ $u_n = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a alors $v_n = u_0 + u_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cdots\cdots + u_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

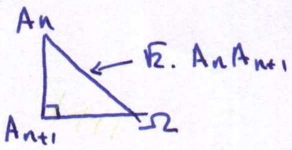
$$= u_0\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \cdots\cdots + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) = u_0 \cdot \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ⓑ $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{u_0}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6\times 2}{2-\sqrt{2}} = \frac{12}{2-\sqrt{2}} = \frac{12(2+\sqrt{2})}{2}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 6(2+\sqrt{2})$

④ ⓐ $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} d'après (1d)

d'où le centre du cercle circonscrit est le milieu de $[\Omega A_n]$ et le rayon vaut $r_n = \frac{\Omega A_n}{2} = \sqrt{2}\,\frac{A_nA_{n+1}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$



ⓑ $r_n < 10^{-2} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}u_n < 10^{-2} \iff 6.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} < 10^{-2}$

$\iff (n+1)\ln\frac{\sqrt{2}}{2} < \ln\left(\frac{10^{-2}}{6}\right)$ car $\ln \uparrow$ sur

$\iff n+1 > \frac{\ln\left(\frac{10^{-2}}{6}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ car $\ln\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$.

d'où finalement $n > \frac{\ln\left(\frac{10^{-2}}{6}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - 1 \simeq 17{,}46$.

le plus petit entier naturel p cherché est donc $p = 17$