Exercice 1 :

La décomposition en facteurs premiers de N ne contient que des 2 et des 3. Il Possède 12 diviseurs. Quelles sont les valeurs possibles de N ?

Exercice 2 :

Soit $A_n = 4^{2n+3} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence sur que pour tout $n \in N$, A_n divisible par 5.
2. Démontrer le même résultat à l'aide des congruences.

Exercice 3 :

Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $n + 1$ divise $3n^2 + 15n + 19$.

Exercice 4 :

Déterminer les entiers naturels non nuls dont la division euclidienne par 26 donne un reste égal au carré du quotient.

Exercice 5 :

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 17640.
2. En expliquant votre démarche, déterminer la plus petite valeur de $k \in \mathbb{N}^{\star}$ telle que k^2 soit un multiple de 17640.

Exercice 6 :

Déterminer le reste de la division de 1789^{1789} par 7.

Exercice 7 :

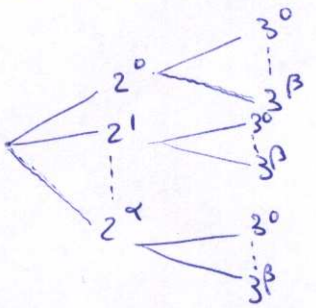
Soit b un entier naturel non nul. Le quotient de la division euclidienne de 758 par b est 50. Déterminer la valeur de b et le reste.

Devoir de maths spécialité N°1

I La décomposition de N ne contient que des 2 et des 3

donc N s'écrit $N = 2^{\alpha}3^{\beta}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$; $\beta \in \mathbb{N}$.

Les diviseurs de $2^{\alpha}3^{\beta}$ sont les entiers s'écrivant $2^{i}3^{j}$, $0 \leq i \leq \alpha$; $0 \leq j$



d'après l'arbre le nombre de diviseurs de $2^{\alpha}3^{\beta}$ ~~vaut~~ $(\alpha+1)(\beta+1)$

Ainsi N s'écrit $N = 2^{\alpha}3^{\beta}$ avec $(\alpha+1)(\beta+1) = 12$

donc $\alpha+1$ diviseur de 12 ;
si $\alpha+1 = 1$ alors $\beta+1 = 12$
si $\alpha+1 = 2$ —— $\beta+1 = 6$
si $\alpha+1 = 4$ —— $\beta+1 = 3$
si $\alpha+1 = 6$ —— $\beta+1 = 2$
si $\alpha+1 = 12$ —— $\beta+1 = 1$

ainsi les couples (α, β) solution sont $(0,11)$; $(1,5)$; $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,1)$, (
et les valeurs possibles de N sont données par l'ensemble

$$S = \{ 3^{11} ; 2\times 3^5 ; 2^3 3^4 ; 2^4 3^3 ; 2^5 \times 3 ; 2^{11} \}$$

II **1** $A_n = 4^{2n+3} + 1$.

Soit P_n la propriété : A_n est divisible par 5.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Etape 1 : pour $n=0$; $A_n = 4^3+1 = 65$ est divisible par 5 donc (P_0) vr

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$ et supposons P_q vraie, montrons P_{q+1} vraie.

P_q vraie donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^{2q+3}+1 = 5k$

on a
$$\begin{aligned} A_{q+1} &= 4^{2(q+1)+3} + 1 \\ &= 4^{2q+3} \times 4^2 + 1 \\ &= (5k-1)\times 4^2 + 1 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 4^2 \times 5k - 15 = 5(4^2 k - 3) \end{aligned}$$

donc 5 divise $A_{q+1} \Longrightarrow P_{q+1}$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ 5 divise A_n

② $A_n = 4^{2n+3} + 1$

$\equiv (-1)^{2n+3} + 1 \quad (5)$ (compatibilité des congruences avec les puissan

$\equiv \cancel{+}-1 + 1 \quad (5)$

$\equiv 0 \quad (5)$ donc $5 \mid A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

III

$$\begin{array}{l|l} 3n^2 + 15n + 19 & n+1 \\ \underline{3n^2 + 3n} & 3n + 12 \\ \quad 12n + 19 & \\ \quad \underline{12n + 12} & \\ \qquad\quad 7 & \end{array}$$

donc $3n^2 + 15n + 19 = (3n+12)(n+1) +$

d'où $n+1 \mid 3n^2 + 15n + 19$

$\Leftrightarrow n+1 \mid 7$ (par combinaison linéaire à coeffs enti

$\Leftrightarrow n+1 \in \{-7; -1; +1; 7\}$

$\Leftrightarrow n \in \{-8; -2; 0; 6\}$

on cherche $n \in \mathbb{N}$ donc l'ensemble des valeurs de n est

$S = \{0; 6\}$.

IV On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} n = 26q + r & 0 \leq r < 26 \\ r = q^2 \end{cases}$

d'où $n = 26q + q^2$ avec $1 \leq q^2 < 26$ ($q \neq 0$ car $n \in \mathbb{N}^*$)

$\Leftrightarrow n = 26q + q^2$ avec $q \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Les valeurs possibles de n sont donc $S = \{27; 56; 87; 120; 155$

V ①

$$\begin{array}{r|l} 17640 & 2 \times 5 \\ 1764 & 2 \\ 882 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7^2 \end{array}$$

donc $17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$

② k^2 multiple de $17640 \Leftrightarrow 17640$ divise k^2

$\Leftrightarrow$ les facteurs premiers de la décomposit° de 17640 se retrouv dans ceux de k^2 avec des puis inférieures.

k et k^2 ayant les mêmes facteurs premiers,
on déduit que k s'écrit à l'aide des facteurs premiers de 17640
d'où $k = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma} 7^{\delta}$

$\Rightarrow k^2 = 2^{2\alpha} 3^{2\beta} 5^{2\gamma} 7^{2\delta}$ et on doit choisir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ le plus petit possible mais tels que 17640 divise k^2; d'où $\alpha = 2$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$; $\delta = 1$

donc $k = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 =$

VI $1789 \equiv 389 \equiv 39 \equiv 4 \ (7)$ (car $1789 = 1400 + 389$
$= 1400 + 350 + 39$
$= 1400 + 350 + 35 + 4$)

d'où $1789^{1789} \equiv 4^{1789} \ (7)$.

et $4 \equiv 4 \ (7)$
$4^2 = 16 \equiv 2 \ (7)$
$4^3 = 8 \equiv +1 \ (7)$

et $1789 = 1788 + 1 = 3k + 1$; $k \in \mathbb{N}$.

donc $1789^{1789} \equiv 4^{1789} \equiv 4^{3k+1} \equiv (4^3)^k \times 4 \equiv 4 \ (7)$

Le reste de la division de 1789^{1789} par 7 est 4.

VII $758 = 50b + r$ avec $0 \leq r < 50$

d'où $758 - r = 50b$
$\Leftrightarrow 750 + 8 - r = 50b \Leftrightarrow 8 - r = 50(b - 15)$

donc $8 - r$ multiple de 50 $\Leftrightarrow r - 8$ multiple de 50 avec $-8 \leq r - 8 \leq$
d'où $r - 8 = 0$ donc $r = 8$

on a alors $758 = 50b + 8 \Leftrightarrow 750 = 50b$ donc $b = 15$

Rq : C'est plus rapide avec les congruences :

$758 = 50b + r$ avec $0 \leq r < 50$

donc on a $8 \equiv r \ (50) \Rightarrow r = 8 \Rightarrow b = 15$.