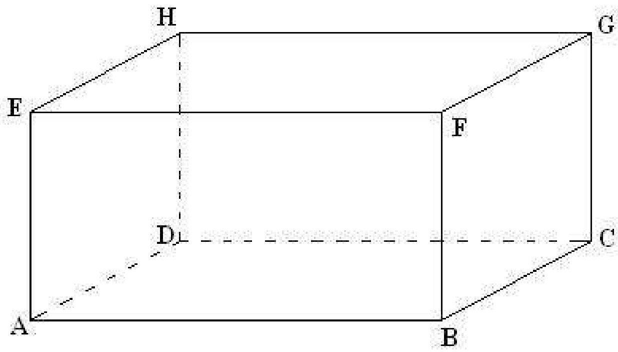
Lycée : Nafta Prof : GUESMIA AZIZA	**Série d''exercicescorrigés Orthogonalité dans l'espace Parallélisme dans l'espace**	Classe : 2 ème Sciences 4 Date : 04 / 5 / 2016

Exercice n°1.

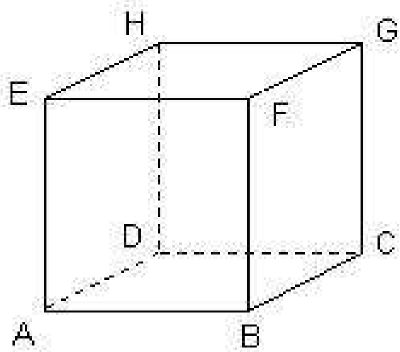
ABCDEFGH est un pavé droit.



1) Démontrez que la droite (AE) est parallèle au plan (BFHD).
2) Démontrez que la droite (EH) est parallèle au plan (BFGC).
3) a) Démontrez que la droite (EB) est parallèle au plan (DCGH).
b) Démontrez que la droite (AF) est parallèle au plan (DCGH).
c) La propriété « si deux droites sont parallèles au même plan alors ces deux droites sont parallèles » est-elle vraie ?

4) Soit O le centre de la face ABCD et O' le centre de la face EFGH.
a) Démontrez que la droite (BF) est parallèle au plan (BFHD).
b) Démontrez que la droite (BF) est parallèle au plan (AEGC).
c) Démontrez que la droite (BF) est parallèle à la droite (OO').

Pour les exercices n°2 à 5, on considère le cube* ABCDEFGH *ci-contre :



Exercice n°2.

Intersection de deux plans :

Déterminer la droite intersection des plans :
1) (ABF) et (BCH)
2) (EFG) et (ABC)
3) (ACE) et (BFH)
4) (ADE) et (BCH)
5) Montrer que les droites (EB) et (DG) sont orthogonales.
6) Montrer que les droites (HF) et (AC) sont orthogonales.
7) Montrer que les droites (AE) et (FH) sont orthogonales.
Calcul de volumes : On suppose que ABCDEFGH est un cube d'arête mesurant 5 cm.
8) Calculer le volume V de la pyramide de sommets A, B, D, E :
9) Calculer le volume V' du prisme de sommets A, B, F, H, D, E :

Exercice n°3.

Montrer que les droites (AC) et (BF) sont orthogonales.

Exercice n°4.

1) Montrer que la droite (HF) est orthogonale au plan (ACGE).
2) Conclure.

Exercice n°5.

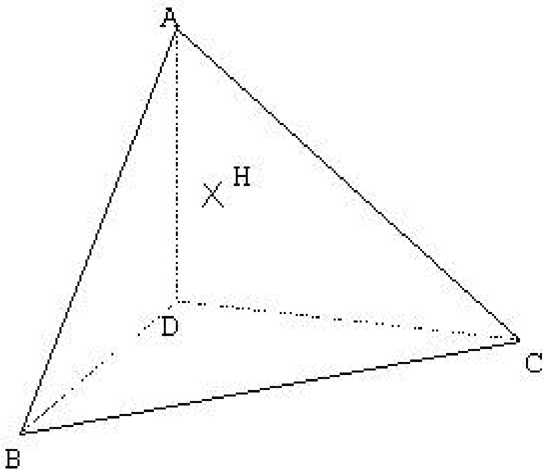
Montrer que les droites (CH) et (AG) sont orthogonales.

Exercice n°6.

ABCD est un tétraèdre, ABD est isocèle en A et BCD est isocèle en C. I est le milieu de [BD].
1) Faire une figure.
2) Montrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

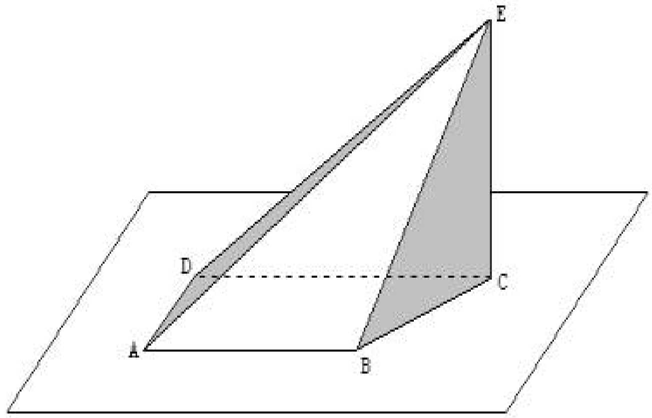
Exercice n°7.

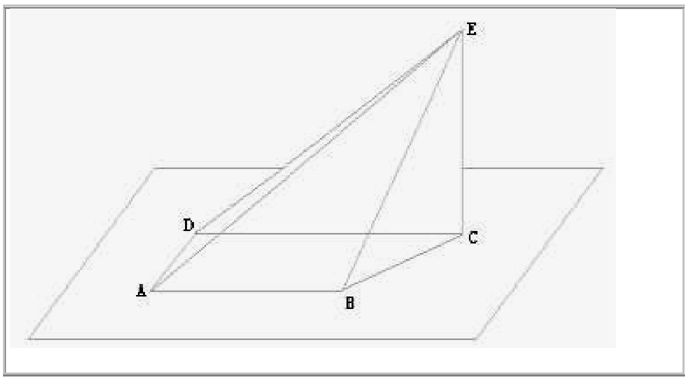
Soit ABCD un tétraèdre tel que la droite (AD) est orthogonale au plan BCD.
On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC.
Démontrer que les droites (DH) et (BC) sont orthogonales.

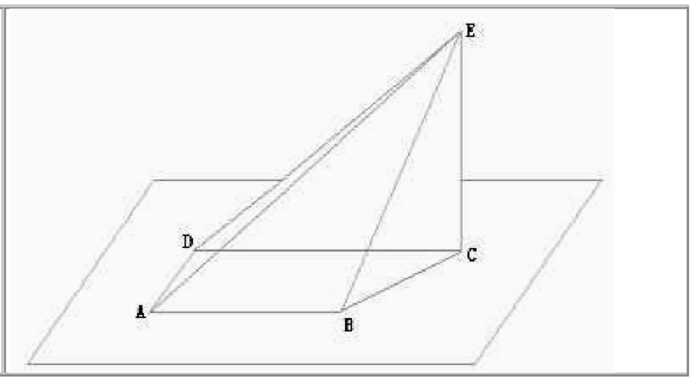


Exercice n°8.

ABCDE est une pyramide dont la base ABCD est un trapèze rectangle de bases [AB] et [CD] avec (AD) $\perp$ (AB). La droite (EC) est orthogonale au plan (ABCD). On a AB = 5, DC = 7, AD = 3 et EC = 4.
1) Calculer le volume de la pyramide ABCDE.
2) I, J et K sont les milieux respectifs de [DE], [AE] et [BE]. a)
Montrer que les plans (IJK) et (ABCD) sont parallèles.
b) Tracer la section de la pyramide ABCDE part le plan (IJK).
c) Représenter chacun des deux solides obtenues en coupant la pyramide ABCDE par le plan (IJK).





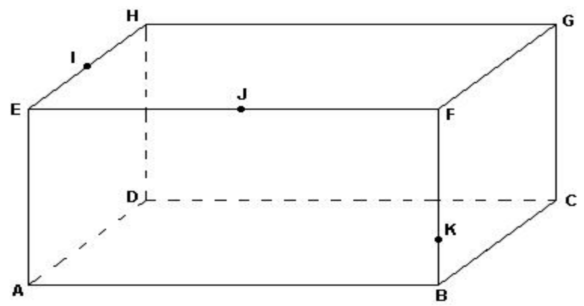


d) Calculer le volume de chacun des deux solides précédents.

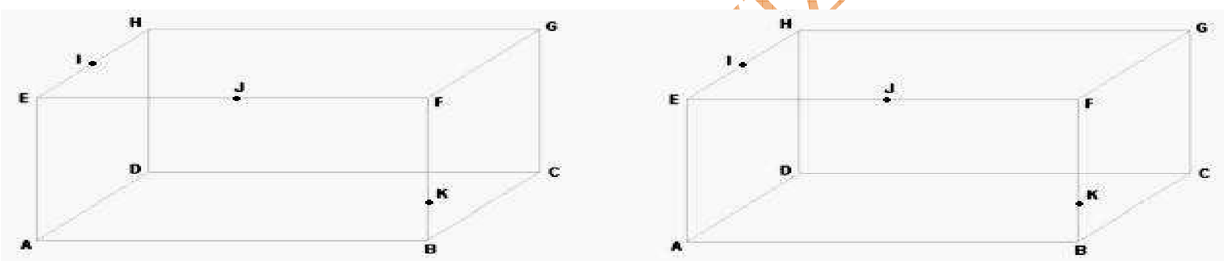
Exercice n°9.

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Les points I, J et K sont placés ci-contre.

Le but de l'exercice est de tracer la section de ABCDEFGH par le plan (IJK).

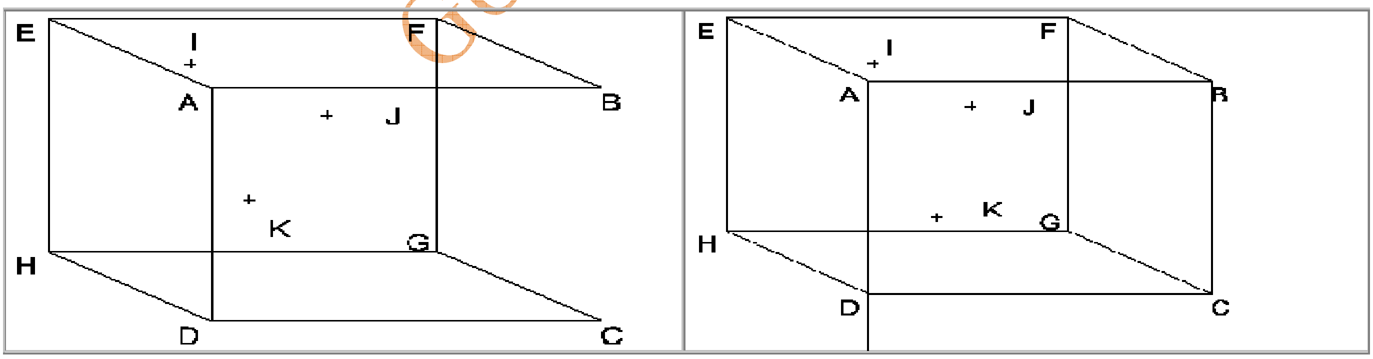


1) Tracer le segment intersection du plan (IJK) avec la face EFGH.
2) Tracer le segment intersection du plan (IJK) avec la face ABFE.
3) a) Expliquer pourquoi les droites (IJ) et (FG) sont sécantes. Notons L leur point d'intersection.
b) Déterminer la droite intersection des plans (IJK) et (BCGF). Tracer alors le segment intersection du plan (IJK) avec la face BCGF.
4) Comment sont les plans (ABCD) et (EFGH) ? Tracer alors le segment intersection du plan (IJK) avec la face ABCD.
5) Poursuivre et terminer le tracé de la section de ABCDEFGH par (IJK).
6) Le parallélépipède ABCDEFGH étant coupé en deux par le plan (IJK), représenter ci-dessous chacune des deux parties obtenues.



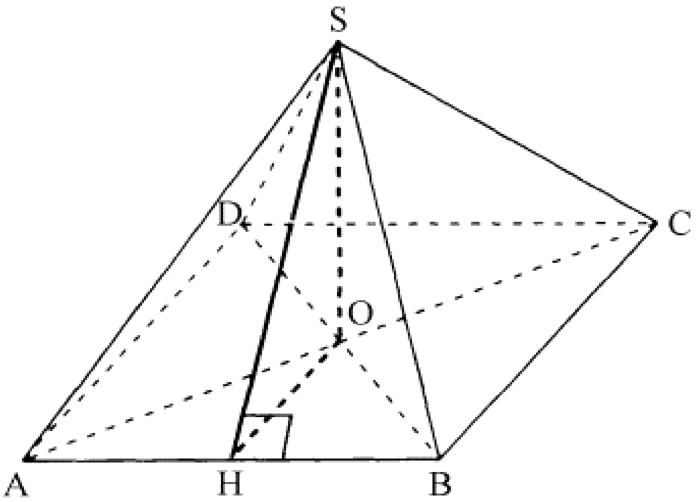
Exercice n°10.

I appartient au plan (ABFE), J et K au plan (ABCD). Tracer la section du plan IJK avec le pavé.



Exercice n°11.

La pyramide de Khéops ou Grande Pyramide, édifiée à Guizèh en Egypte, est régulière à base carrée. Sa hauteur, qui est encore actuellement de 138 m, devait être à l'origine de 146,6 m. La longueur de la base est de 230 m. Notons S le sommet de la pyramide, ABCD le carré de base et O le centre de ABCD, c'est à dire l'intersection des diagonales (AC) et (BD).



1) Que dire des droites (SO) et (AC) ?

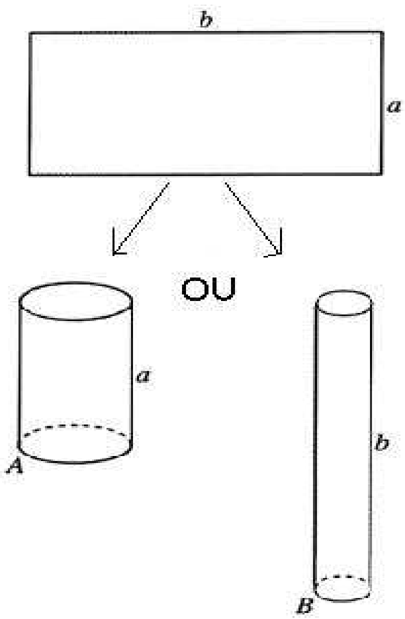
2) Calculer la valeur exacte de la demi-diagonale [OB].

3) Calculer la valeur exacte de SA et donner une valeur approchée à 1 m près. (On prendra SO=146,6 m)

4) L'apothème de la pyramide est la distance du sommet S à l'un quelconque des côtés de la base. Notons H le pied de la hauteur issue de S du triangle SAB.
a) Pourquoi H est-il le milieu de [AB] ?
b) Donner la valeur exacte de SH et une valeur approchée à 1 m près.
c) Calculer le volume de la pyramide et en donner une valeur approchée à 1 m^3 près.

Exercice n°12.

A partir d'un rectangle de côtés a et b , on peut construire deux types de cylindres (A et B), dont le rectangle est la surface latérale (voir figure ci contre)



1) Exprimer en fonction de b le rayon de la base du cylindre A

2) Exprimer en fonction de a le rayon de la base du cylindre B

3) Sachant que $a \leq b$, comparer les volumes V_A et V_B des cylindres A et B.

4) Si b est le double de a, calculer le rapport $\frac{V_A}{V_B}$.

CORRECTION

Exercice n°1.

1) Dans le rectangle ABFE, (AE) est parallèle à (BF). Dans le rectangle AEHD, (AE) est parallèle à (HD). La droite (AE) est donc parallèle à deux droites parallèles du plan (BFHD), donc est parallèle au plan (BFHD).

2) Dans le rectangle EFGH, (EH) est parallèle à (FG). Dans le rectangle EBCH, (EH) est parallèle à (BC). La droite (EH) est donc parallèle à deux droites parallèles du plan (BFGC), donc est parallèle au plan (BFGC).

3)a) Le plan (ABFE) est parallèle au plan (DCGH), donc toute droite incluse dans le plan (ABFE) sera parallèle au plan (DCGH). C'est le cas de la droite (EB).

b) Pour les mêmes raisons, la droite (AF) étant incluse dans le plan (ABFE), elle est parallèle au plan (DCGH)

c) La propriété « si deux droites sont parallèles au même plan alors ces deux droites sont parallèles » est fausses, car (EB) et (AF) sont toutes les deux parallèles au plan (DCGH), mais ne sont pas parallèles entre elles.

4) a) La droite (BF) est incluse dans le plan (BFHD), donc est parallèle au plan (BFHD).

b) Le raisonnement est identique à celui de la question 1) : Dans le rectangle ABFE, la droite (BF) est parallèle à la droite (AE). Dans le rectangle BCGF, la droite (BF) est parallèle à la droite (CG).
La droite (BF) est donc parallèle à deux droites parallèles du plan (ACGE), donc est parallèle au plan (ACGE).

c) La droite (OO') est l'intersection des plans (BFHD) et (ACGE), Le théorème du toit nous permet alors d'affirmer que la droite (BF) est parallèle à la droite (OO').

Exercice n°2.

Intersection de deux plans :

1) Le point B est déjà commun aux deux plans. De plus, puisque (AE) // (BF), le plan (ABF) est aussi le plan (ABFE) (ceci est une autre façon de dire que le point E appartient au plan (ABF)).
Enfin, puisque (BE)//(CH), le point E appartient aussi au plan (BCH) (qui est donc le plan (BECH). Le point E est donc commun aux deux plans. La droite intersection des plans (ABF) et (BCH) est donc la droite (BE)

2) Les deux plans (EFG) et (ABC) sont parallèles car les droites (EF) et (FG) sont respectivement parallèles aux droites (AB) et (BC). Les deux plans n'ont donc aucune intersection

3) Le plan (ACE) est aussi le plan (ACGE). Le plan (BFH) est aussi le plan (BFHD). La droite (EG) appartient au plan ACGE). La droite (FH) appartient au plan (BFHD). Si on note O l'intersection des droites (EG) et (FH), O est le centre du carré EFGH, et un point commun aux deux plans (ACE) et (BFH). De même, si on note O' l'intersection des diagonales du carré ABCD, O' est un point commun aux droites (AC) et (BD), donc aux plans (ACE) et (BFH). L'intersection de (ACE) et (BFH) est la droite (OO')

4) Puisque (AD) // (EH), le point H appartient au plan (ADE), qui est donc le plan (ADHE). Puisque (EH) // (BC), le point E appartient au plan (BCH), qui est donc le plan (BCHE). Les points E et H étant communs aux deux plans (ADE) et (BCH), leur intersection sera donc $\boxed{\text{la droite (EH)}}$

Droites orthogonales :

5) Dans le plan (EBCH), les droites (EB) et (HC) sont parallèles. Or les droites (HC) et (DG) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales du carré DCGH. Ceci prouve (c'est la définition) que les droites (EB) et (DG) sont orthogonales.

6) Dans le plan (BDHF), les droites (HF) et (BD) sont parallèles. Or les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales du carré ABCD. Ceci prouve (c'est la définition) que les droites (HF) et (AC) sont orthogonales.

7) Dans le carré ABFE, la droite (AE) est perpendiculaire à (EF). Dans le carré ADHE, la droite (AE) est perpendiculaire à (EH). La droite (AE) est donc perpendiculaire aux deux droites sécantes (EF) et (EH), donc est perpendiculaire au plan (EFGH), donc (AE) est orthogonale à toute droite du plan (EFGH), donc en particulier à (FH).

Calcul de volumes.

8) L'aire de la base ABD vaut $\frac{AB \times AD}{2} = \frac{25}{2}$ cm² car ABD est un triangle rectangle isocèle.
La hauteur de la pyramide ABDE est AE = 5, on calcule $V = \frac{1}{3}(\text{aire ABD}) \times AE = \frac{1}{3} \times \frac{25}{2} \times 5 = \frac{125}{6}\,\text{cm}^3$.
9) Les deux faces du prisme sont les deux triangles isocèles rectangles ABD et EFH, d'aires respectives $\frac{AB \times AD}{2} = \frac{25}{2}$ cm². La hauteur de ce prisme est AE = 5. Le volume V' de ce prisme est donc :
$V' = (\text{aire ABD}) \times AE = \frac{25}{2} \times 5 = \frac{125}{2}\,\text{cm}^3$. (on peut considérer ce prisme comme le demi-cube).

Exercice n°3.

(BF) est orthogonale au plan (ABCD) car elle est perpendiculaire aux deux droites sécantes (AB) et (BC). La droite (BF) est donc orthogonale à toute droite du plan (ABCD), en particulier à (AC).

Exercice n°4.

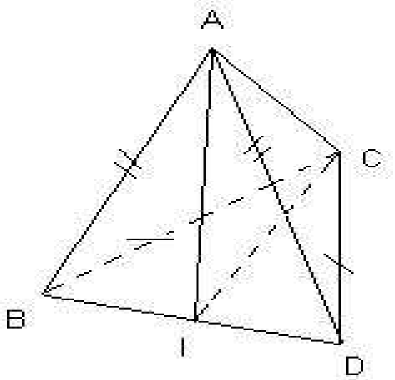
1) La droite (HF) est perpendiculaire à la droite (EG) car se sont les deux diagonales du carré EFGH.
De plus, la droite (HF) est orthogonale à la droite (CC) car (CG) est orthogonale au plan (EFGH) et donc à toutes les droites de ce plan. Ainsi (HF) est orthogonale à deux droites sécantes, (EG) et (CG), du plan (ACGE). Elle est donc orthogonale à ce plan.
2) La droite (HF) étant orthogonale à tout le plan (ACGE), elle est en particulier orthogonale à toute droite du plan (ACGE), donc elle est orthogonale à (AG).

Exercice n°5.

La droite (CH) est perpendiculaire à la droite (DG) car ce sont les diagonales du carré CDHG.
De plus, la droite (CH) est orthogonale à (AD) car (AD) est orthogonale au plan (DCGH) et donc à toutes les droites de ce plan. Ainsi (CH) est orthogonale à deux droites sécantes, (AD) et (DG), du plan (ADG). Elle est donc orthogonale à ce plan, et donc à toutes les droites de ce plan, en particulier à (AG).

Exercice n°6.

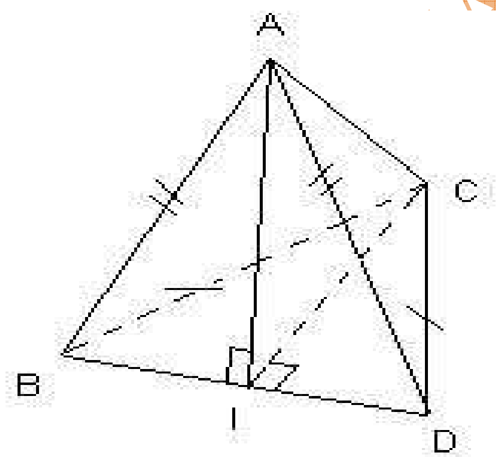
1) Figure :



2) Puisque le triangle ABD est isocèle en A et que I est le milieu de [BD], alors la médiane [AI] est aussi médiatrice de [BD] et hauteur, de sorte que (BD) $\perp$ (AI).

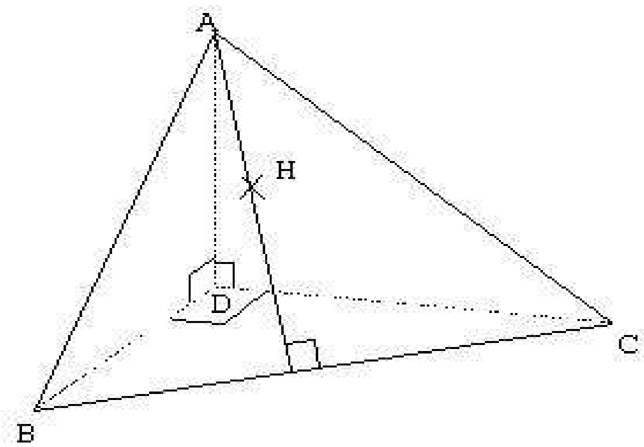
Puisque le triangle CBD est isocèle en C et que I est le milieu de [BD], alors la médiane [CI] est aussi médiatrice de [BD] et hauteur, de sorte que (BD) $\perp$ (CI).

La droite (BD) est donc perpendiculaire à deux droites sécantes (AI) et (CI) du plan (AIC), donc elle est orthogonale à tout le plan (AIC), donc orthogonale à toute droite du plan (AIC). En particulier, (BD) est orthogonale à (AC).



Exercice n°7.

Puisque H est l'<u>orthocentre</u> du triangle (ABC), la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (AH). Puisque (AD) est orthogonale au plan BCD, (AD) est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier (AD) est orthogonale à (BC). (BC) est donc orthogonale à deux droites sécantes (AH) et (AD). Elle est donc orthogonale à tout le plan (AHD), donc est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier (BC) est orthogonale à (DH).



Exercice n°8.

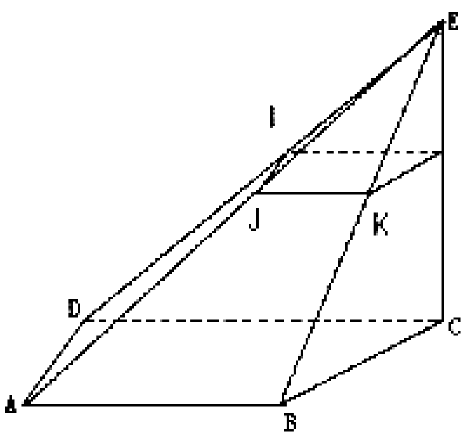
1) Le volume de la pyramide ABCDE vaut $V = \frac{1}{3}(\text{aire base ABCD}) \times \text{hauteur(EC)}$, puisque (EC) est orthogonale à la face ABCD. L'aire de la base ABCD vaut :

$$\left(\frac{\text{Grande base+Petite base}}{2}\right) \times \text{Hauteur} = \frac{\text{CD+AB}}{2} \times \text{AD} = \frac{7+5}{2} \times 3 = 18\text{cm}^2. \text{ Ainsi } V = \frac{1}{3} \times 18 \times 4 = 24\text{cm}^3.$$

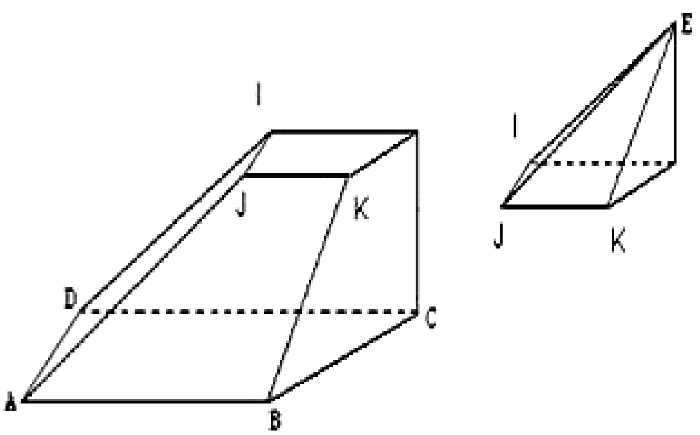
2) a) Dans le plan ADE, puisque I est le milieu de [DE] et J est le milieu de [AE], la propriété de la droite des milieux nous permet d'affirmer que (IJ) // (AD). Dans le plan AEB, puisque J est le milieu de [AE] et K est le milieu de [BE], la propriété de la droite des milieux nous permet d'affirmer que (JK) // (AB).

Les droites sécantes (IJ) et (JK) sont respectivement parallèles aux droites sécantes (AD) et (AB), donc le plan (IJK) et le plan (ABD) sont parallèles. Ainsi les plans (IJK) et (ABCD) sont parallèles.

b)



c)

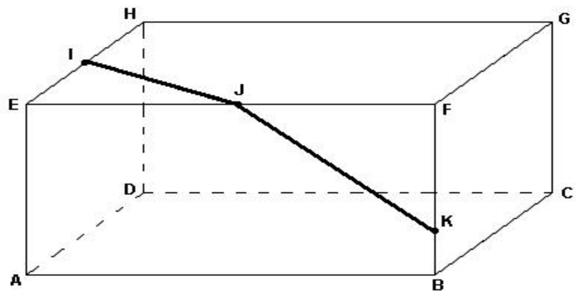


d) Les dimensions de la pyramide « supérieure » étant égales à la moitié de celles de la pyramide ABCDE (puisque I, J et K sont milieux), son volume est à diviser par $2^3=8$.

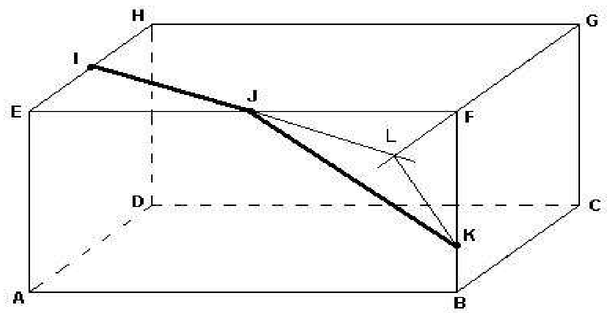
Ainsi le volume de la petite pyramide vaut : $\frac{1}{8} \times 24 = 3\text{cm}^3$, tandis que par soustraction, celui du tronc restant vaut $24 - 3 = 21$ cm^3.

Exercice n°9.

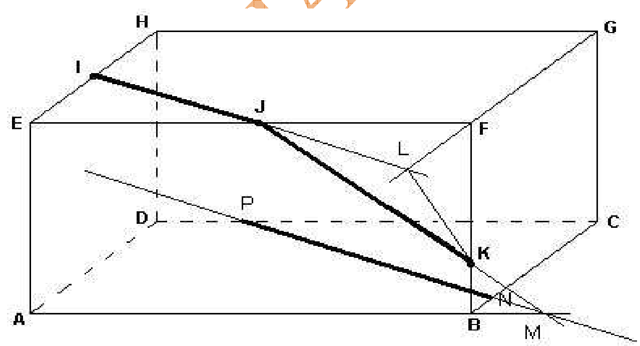
1) Le segment [IJ] appartient aux deux plans (IJK) et (EFGH), donc il est intersection du plan (IJK) avec la face EFGH.
2) Le segment [JK] appartient aux deux plans (IJK) et (ABFE), donc il est intersection du plan (IJK) avec la face ABFE.



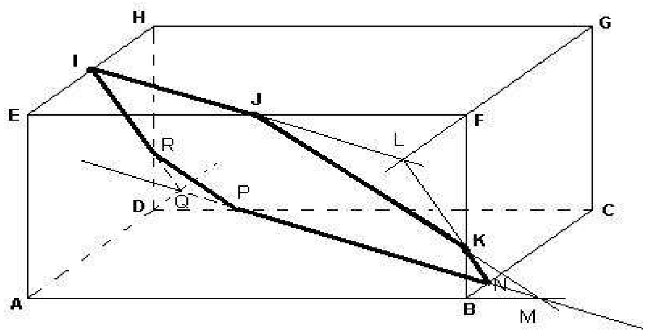
3) a) Les deux droites (IJ) et (FG) sont coplanaires, et dans leur plan commun, elles ne sont pas parallèles (car J n'appartient pas à [EH]. Elles sont donc sécantes en un point L.
b) Puisque L est le point d'intersection de (IJ) et (FG), L est un point de (IJ) donc du plan (IJK), et L est un point de la droite (FG) donc du plan (BCGF). De plus K est un point commun aux plans (IJK) et (BCGF). Ainsi, le segment intersection du plan (IJK) avec la face BCGF est le segment (KL)



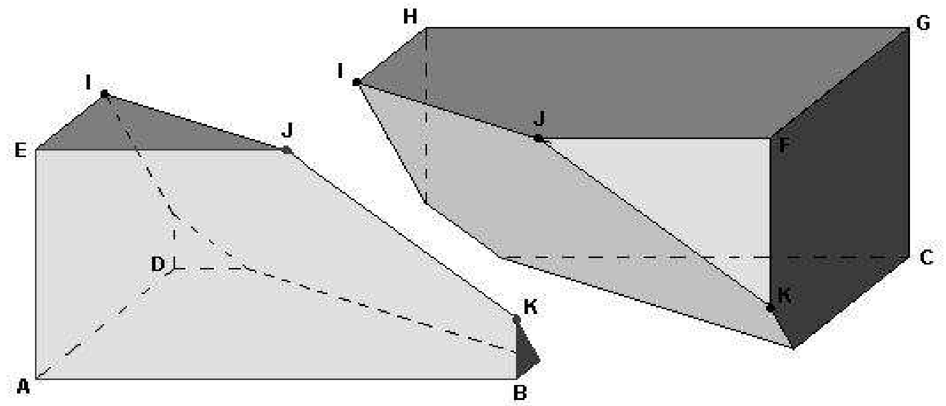
4) Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles.
Traçons le point M intersection des droites (JK) et (AB) dans la face « frontale » ABFE.
Le point M appartient à la face ABCD puisqu'il appartient à la droite (AB), et appartient au plan (IJK) puisqu'il appartient à la droite (JK). Le point M appartient donc à l'intersection des deux plans (IJK) et (ABCD).
Puisque les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, il existe, dans le plan (ABCD), une parallèle à la droite (IJ) passant par M. Cette parallèle est entièrement contenue dans le plan (IJK) car elle est parallèle à (IJ) et passe par un point M appartenant au plan (IJK).
Notons N et P les points d'intersection de cette parallèle avec respectivement (BC) et (DC). Ces points appartiennent au plan (IJK) ainsi qu'au plan (ABCD) (car ils appartiennent à (BC) et (CD). Le segment intersection du plan (IJK) avec la face ABCD est donc le segment [NP].



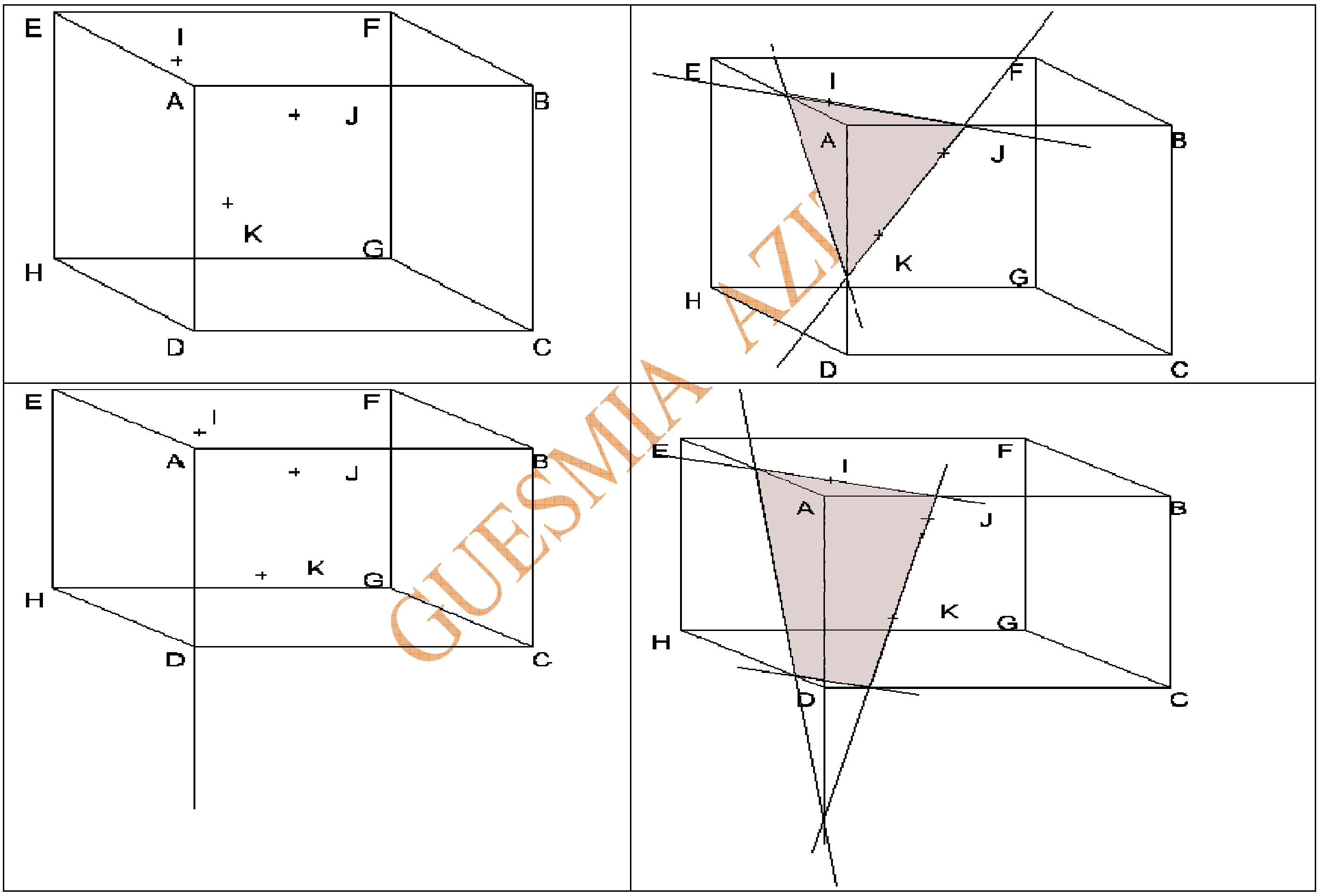
5) L'intersection du plan (IJK) et de la face (BCGF) est le segment [KN] car les deux points appartiennent au plan (IJK) (par construction du point N) et à la face (BCGF).
Notons Q le point d'intersection de (NP) et (AD). Alors Q appartient au plan (IJK) puisque (NP) est entièrement contenue dans ce plan. De plus Q appartient à la face (ADHE) car il appartient à (AD).
Finalement Q appartient aux deux plans (IJK) et (ADHE). Si on note R l'intersection de (IQ) et (HD), le segment intersection de (IJK) et de la face (ADHE) est le segment [IR]. Enfin, le segment intersection de la face (DCGH) et de (IJK) est par voie de conséquence le segment [RP].



6)



Exercice n°10.



Exercice n°11.

1) Les droites (SO) et (AC) sont perpendiculaires car (SO) est la hauteur de la pyramide, donc elle est orthogonale au plan ABCD, donc à toute droite de ce plan, en particulier (AC).

2) Dans le carré ABCD, les diagonales se coupent en leur milieu, $\mathrm{OB} = \frac{1}{2}$ BD.

Le <u>théorème de Pythagore</u> appliqué au triangle BAD rectangle isocèle en A, nous donne :

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2x52900 = 105800$.

Donc $\mathrm{BD} = \sqrt{105800} = 10\sqrt{1058}$ et par suite $\mathrm{OB} = 5\sqrt{1058}$.

3) SA = SB et dans le triangle SOB rectangle en O, le <u>théorème de Pythagore</u> nous permet de calculer

$SB^2 = SO^2 + OB^2$ =26450 + 21491,56 = 47941,56. Donc $SA = SB = \sqrt{47941{,}56} \approx 219m$ à 1 m près.

4) a) Comme le triangle SAB est isocèle en S, la hauteur issue de S est également médiatrice de [AB] et médiane issue de S, donc H est le milieu de [AB].
b) Dans le triangle SHA rectangle en H, le <u>théorème de Pythagore</u> nous permet de calculer :
$SH^2 = SB^2 - HB^2 = 47941{,}56 - 115^2 = 34716{,}56$. Donc $SH = \sqrt{34716} \approx 186$ m à 1 m près.
c) $V = \frac{1}{3}(\text{aire de la base}) \times \text{hauteur} = \frac{1}{3} \times 230^2 \times 146{,}6 \approx 2585047 \text{m}^3$ à 1 m^3 près.

Exercice n°12.

1) Si on note r_A le rayon de la base du cylindre A, alors $b = 2\pi\, r_A \Leftrightarrow r_A = \frac{b}{2\pi}$

2) Si on note r_B le rayon de la base du cylindre B, alors $a = 2\pi\, r_B \Leftrightarrow r_B = \frac{a}{2\pi}$

3) Le volume du cylindre A est donné par $V_A = \pi\, r_A^2 \times h_A = \pi\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \times a = \frac{a\ b^2}{4\,\pi}$

Le volume du <u>cylindre</u> B est donné par $V_B = \pi\, r_B^2 \times h_B = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \times b = \frac{b\ a^2}{4\,\pi}$

Le rapport $\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{a\ b^2}{4\pi}}{\frac{b\ a^2}{4\pi}} = \frac{b}{a}$ Ainsi, si $a \leq b$, on aura $1 \leq \frac{V_A}{V_B}$ donc $V_B \leq V_A$

4) Si $b = 2a$, $\frac{V_A}{V_B} = 2$ donc le volume du cylindre A sera le double de celui du cylindre B.