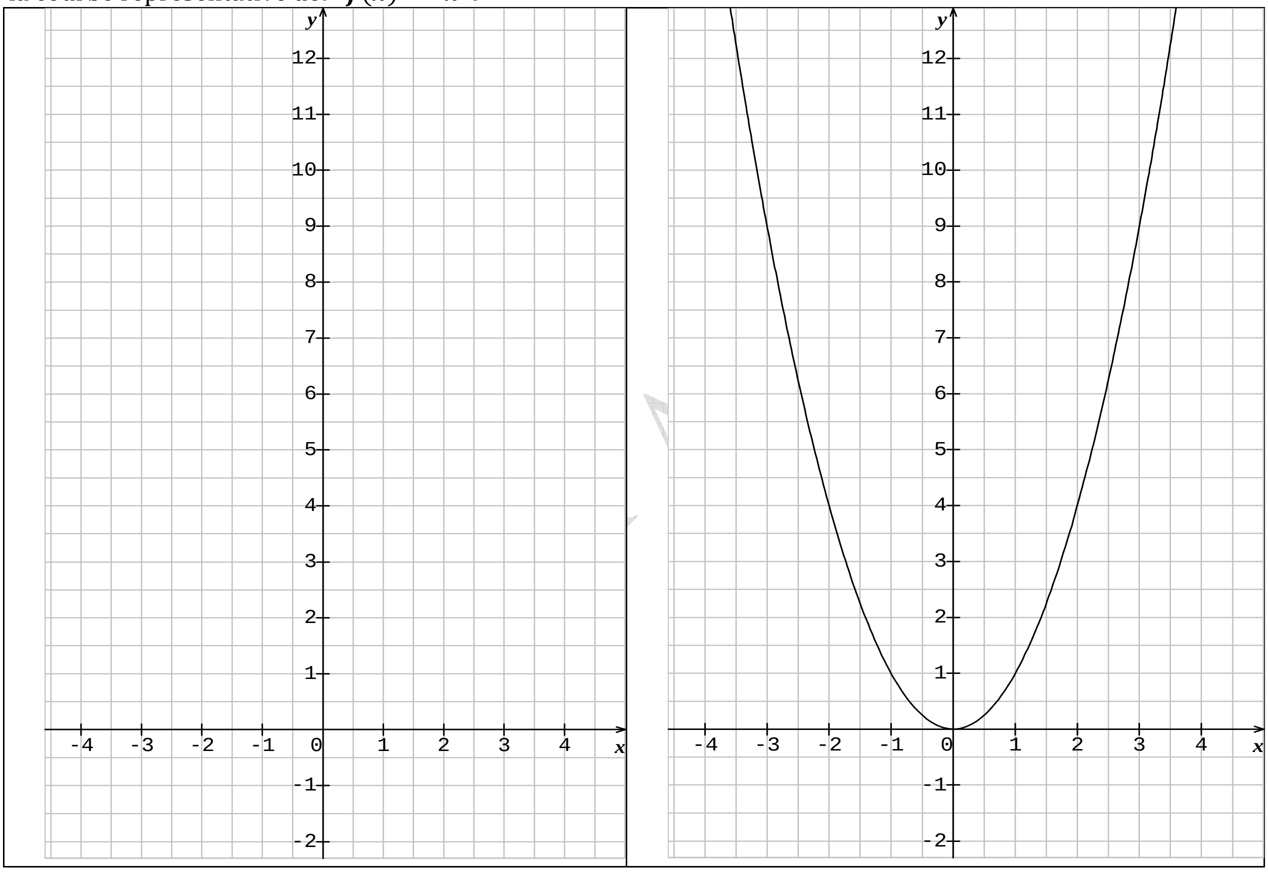
## Fonctions du type $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c\ ;\ a \neq 0$

**1)** ***La fonction carrée*** Il s'agit de la fonction f définie sur IR par: $f(x) = x^2$.

a) Tracé point par point de la courbe représentative de *f*. Compléter ce tableau de valeurs en utilisant la calculatrice.

| $x$ | -3 | $-\frac{5}{2}$ | -2 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | 4 | $\frac{9}{4}$ | 1 | | | | | | | | | $\frac{25}{4}$ | |

Tracer la courbe représentative de: $f(x) = x^2$.



La courbe représentative de $\mathbf{f(x) = x^2}$.s'appelle une **parabole**.

b) Etude de la parité de *f*

Soit $x \in IR$, alors $-x \in IR$. Comparons $f(x)$ et $f(-x)$ : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.On dit que ***f* est une fonction paire.**
Graphiquement, cela signifie que les points M($x$ ; $f(x)$) et M' ($-x$ ; $f(-x)$) qui sont des points de la courbe représentative de *f* sont symétriques par rapport à l'**axe des ordonnées**. La représentation graphique de *f* admet donc l'**axe des ordonnées** pour **axe de symétrie**.

c) Sens de variation de *f*. D'après le graphique, on peut établir le tableau de variation de *f*.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | ↘ | 0 | ↗ |

*f* est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
*f* est strictement décroissante sur$]-\infty\ ;0]$.

Par le calcul : Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$. $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- Si $a$ et $b$ sont positifs ou nuls, alors $a + b > 0$ et comme $a - b < 0$, on déduit que $f(a) - f(b) < 0$

Donc *f* est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

- Si $a$ et $b$ sont négatifs ou nuls, alors $a + b < 0$ et comme $a - b < 0$, on déduit que $f(a) - f(b) > 0$

Donc $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

| |
|---|
| La courbe représentative de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ est une **parabole.** Le point O est appelé le sommet de la parabole et la droite d'équation $x = 0$ est appelée l'axe de la parabole. |

Remarque : On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ; $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $-\infty$.

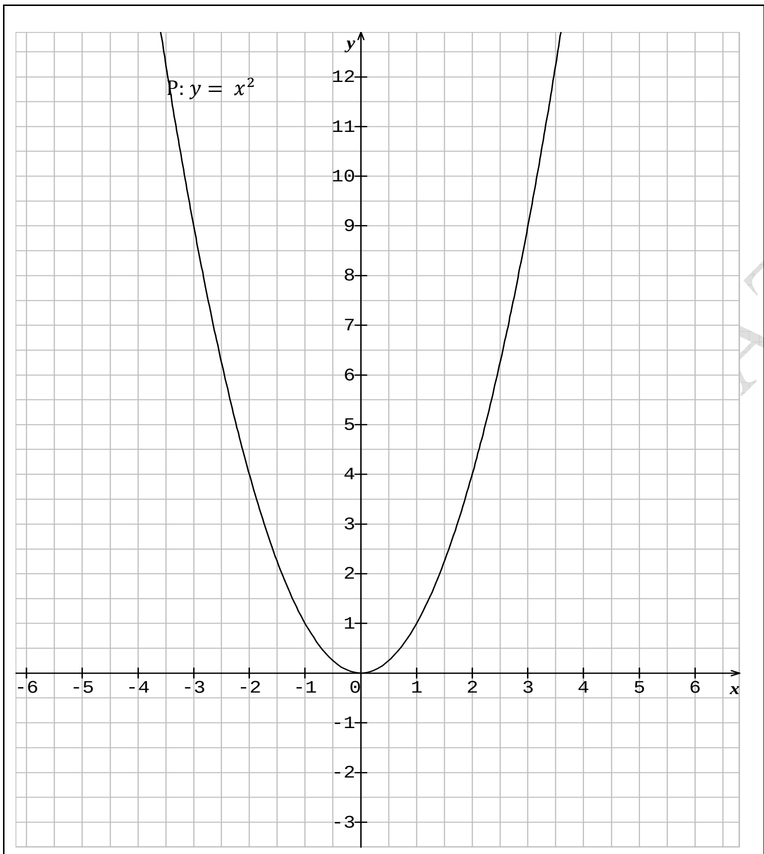
## 2) *Fonctions du type $f(x) = a\,x^2$ ; $a \neq 0$*

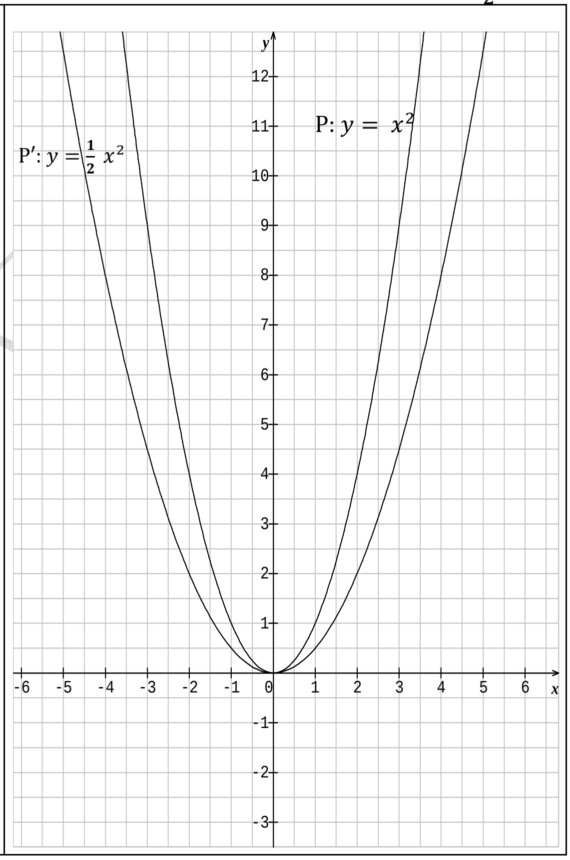
a) Tracé de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Compléter le tableau suivant :

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}x^2$ | | | | | | | | | | | |

Soit P la parabole d'équation : $y = x^2$ Tracer sur le graphique ci-dessous, la représentation de P': $y = \frac{1}{2}x^2$




Observation :

Le point M($x$ ; $y$) appartient à P' si et seulement si $y = \frac{1}{2}x^2$, soit $y = x^2$ Le point N($x$ ; $2y$) appartient donc à la parabole P.

On passe de M à N (donc de P' à P), par une dilatation verticale de coefficient .............. et de N à M (donc de P à P'), par une dilatation verticale de coefficient ............................

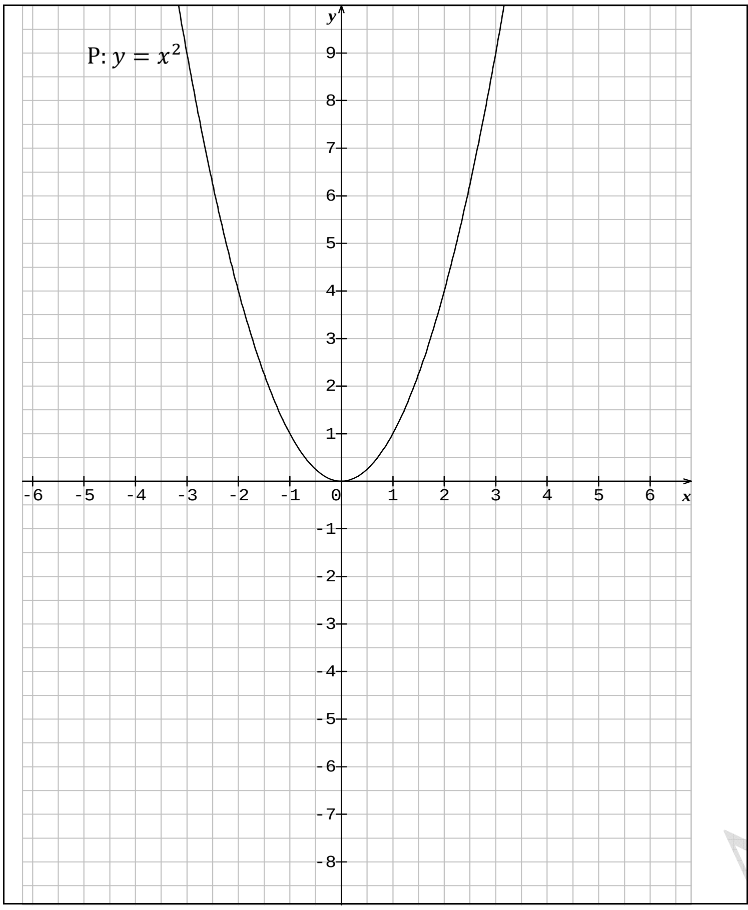
| |
|---|
| En conclusion : Pour tracer P': $y = \frac{1}{2}x^2$ à partir de P: $y = x^2$, on lui fait subir ........................................... |
| **P' : $\boldsymbol{y = k.x^2}$ $\boldsymbol{(k > 0)}$, est déduite de P par**...................................... |

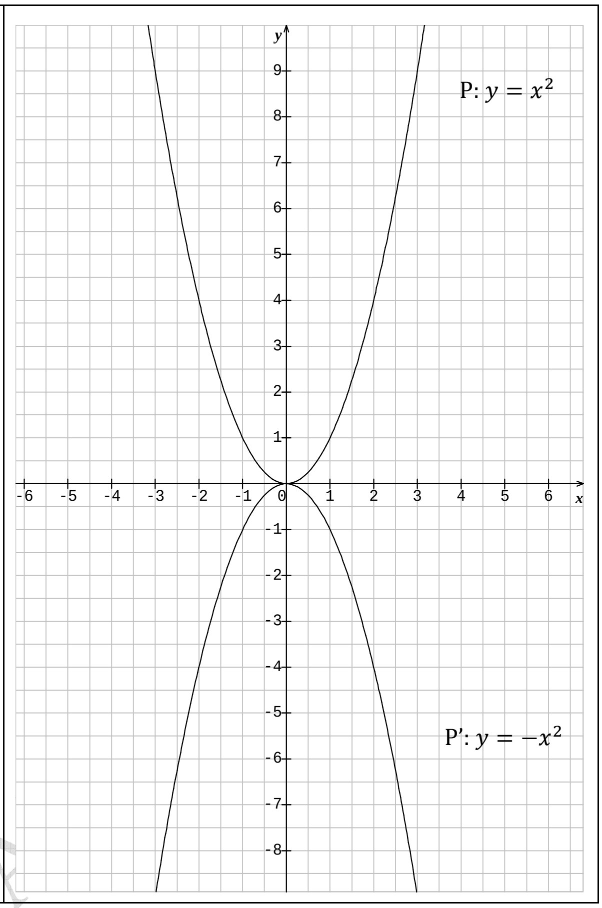
**b)** Tracé de la fonction $f(x) = -x^2$

Compléter le tableau suivant:

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2$ | | | | | | | | | | | |

Tracer sur le graphique ci-dessous, la représentation de P': $y = -x^2$





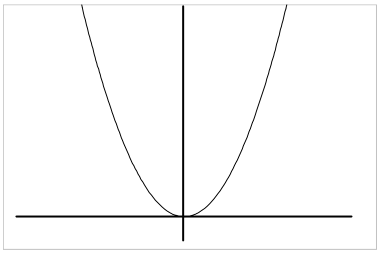

Observation : Le point M(x ; y) appartient à P’ si et seulement si : $y = -x^2$, soit $-y = x^2$
Le point N$(x\,;\,-y)$ appartient donc à la parabole P. On passe de M à N (donc de P’ à P), par une …………………
et de N à M (donc de P à P’), par une …………………………………………

En conclusion : Pour tracer P’: $y = -x^2$ à partir de P: $y = x^2$ , on lui fait subir……………………………………………
**P’ : $y = -x^2$ , est déduite de P par**………………………

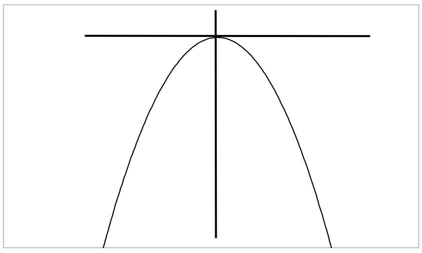
## *Généralisation*

***Fonctions du type $f(x) = a\,x^2$ ; $a \neq 0$***
Le plan est muni d’un repère orthogonal .Soit $a$ un réel non nul. La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur IR par $f(x) = a\,x^2$ ; $a \neq 0$, est une parabole de sommet O et d’axe de symétrie la droite d’équation: $x = 0$.

$a > 0$



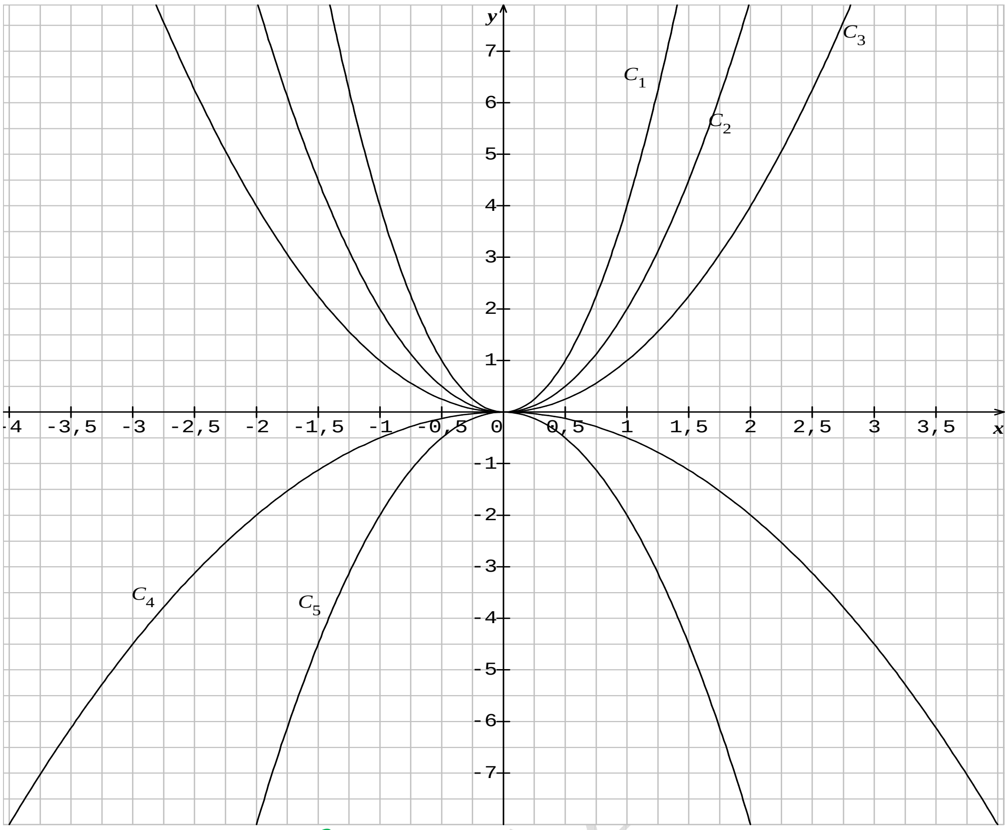
$a < 0$



**Compléter** Si $a > 0$ ; $f$ est croissante sur ……………………… et décroissante sur ………………………
Si $a < 0$ ; $f$ est croissante sur ……………………… et décroissante sur ………………………

## Exercice

Chaque parabole du graphique ci-dessous, représente une fonction du type : $f(x) = m\,x^2$, ou $m$ est une réelle.
1) Déterminer pour chaque parabole: $C_1$ ; $C_2$ ; $C_3$ ; $C_4$ et $C_5$ la valeur de $m$ correspondante.
2) Etudier pour chaque parabole les variations de $f$ sur IR.
3) Préciser les coordonnées du sommet de chaque parabole.



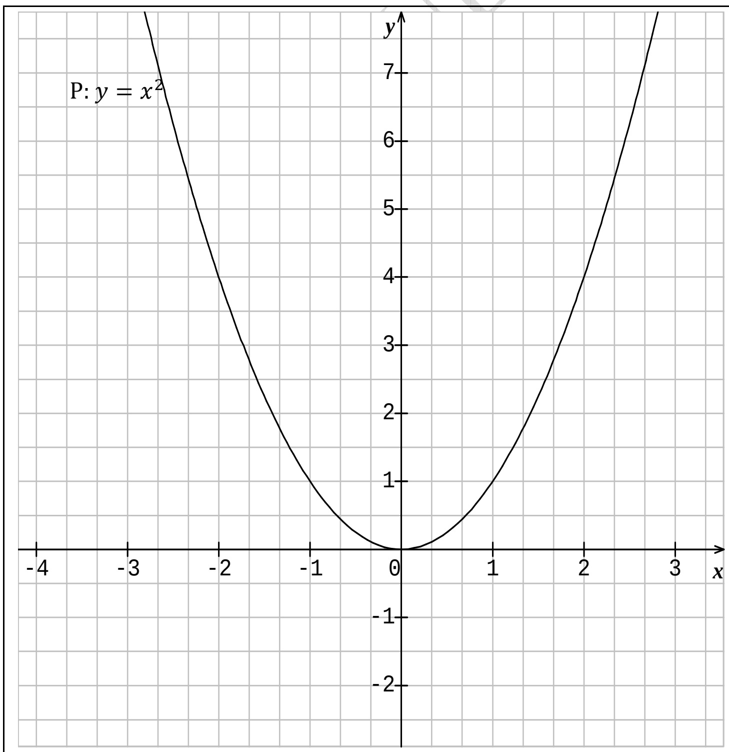

## 3) *Fonctions du type $f(x) = a(x-\alpha)^2$ ; $a \neq 0$*

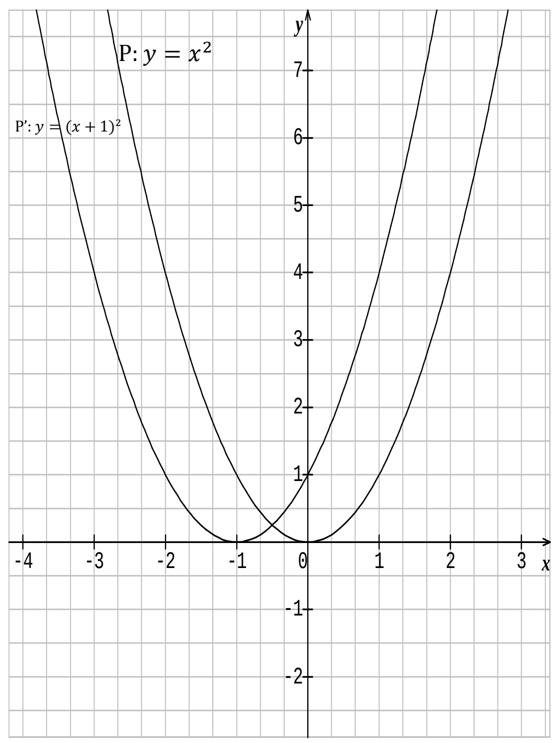
Tracé de la *fonction* $f(x) = (x+1)^2$

Compléter le tableau suivant :

| $x$ | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x+1)^2$ | | | | | | | | | | | |

Soit P la parabole d'équation :$y = x^2$. Tracer sur le graphique ci-dessous, la représentation de P' : $y = (x+1)^2$.



Observation: Si on applique la fonction $f(x) = x^2$ à $(x+1)$, on obtient : $f(x+1) = (x+1)^2$.
Le point M $(x\,;\ y)$ appartient à P' si et seulement si $y = (x+1)^2$. Le point N $(x+1\,;\ y)$ appartient donc à la parabole P.
On passe de M à N (donc de P' à P), par une translation de vecteur .............. et de N à M (donc de P à P'), par une translation de vecteur ..............
Comparons P et P'. P' a-t-elle la même allure que P ?..........................Comment trace-t-on P' à partir de P ?
..................................................................................

En conclusion : Pour tracer $P' : y = (x+1)^2$ à partir de P : $y = x^2$, on lui fait subir ..............................

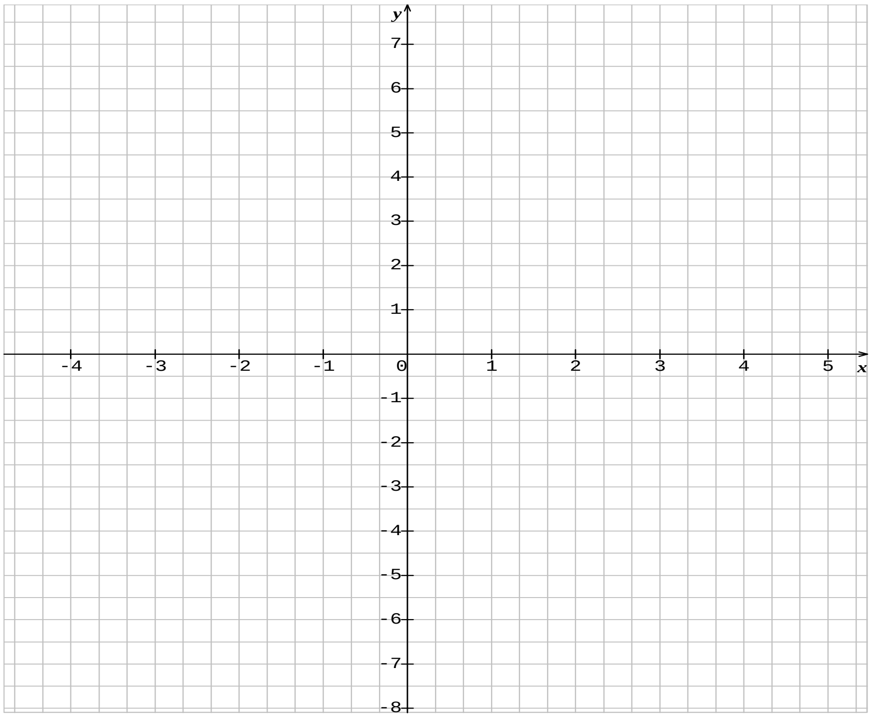
## *Généralisation*

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit α un réel. La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur IR par: $f(x) = (x-\alpha)^2$, est une parabole de sommet $S(\alpha, 0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation : $x = \alpha$.

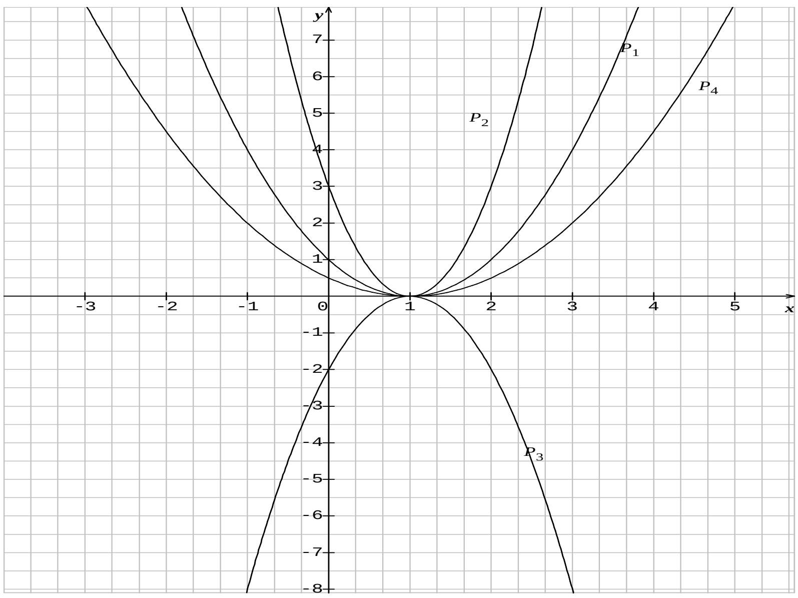
## Exercice corrigé

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (voir dessin).

1) On considère la parabole $P_1 : y = (x-1)^2$ Déterminer le sommet et l'axe de $P_1$, puis construire $P_1$.
2) Dans le même repère, construire les paraboles: $P_2 : y = 3(x-1)^2$ ; $P_3 : y = -2(x-1)^2$ ; $P_4 : y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ .




## Correction



$P_1; P_2; P_3; et P_4$ ont le même sommet $S(1\ ;0)$

***Généralisation***

| |
|---|
| *Fonctions du type* $f(x) = a(x-\beta)^2$ ; $a \neq 0$<br>Le plan est muni d'un repère orthogonal$(O\ ;\ \vec{I}\ ;\ \vec{J})$ .Soit $a$ un réel non nul et $\beta$ un réel. La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur IR par: $f(x) = a\,(x-\beta)^2$ ; $a \neq 0$, est une parabole de sommet S $(\beta\ ; 0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation : $x = \beta$. |

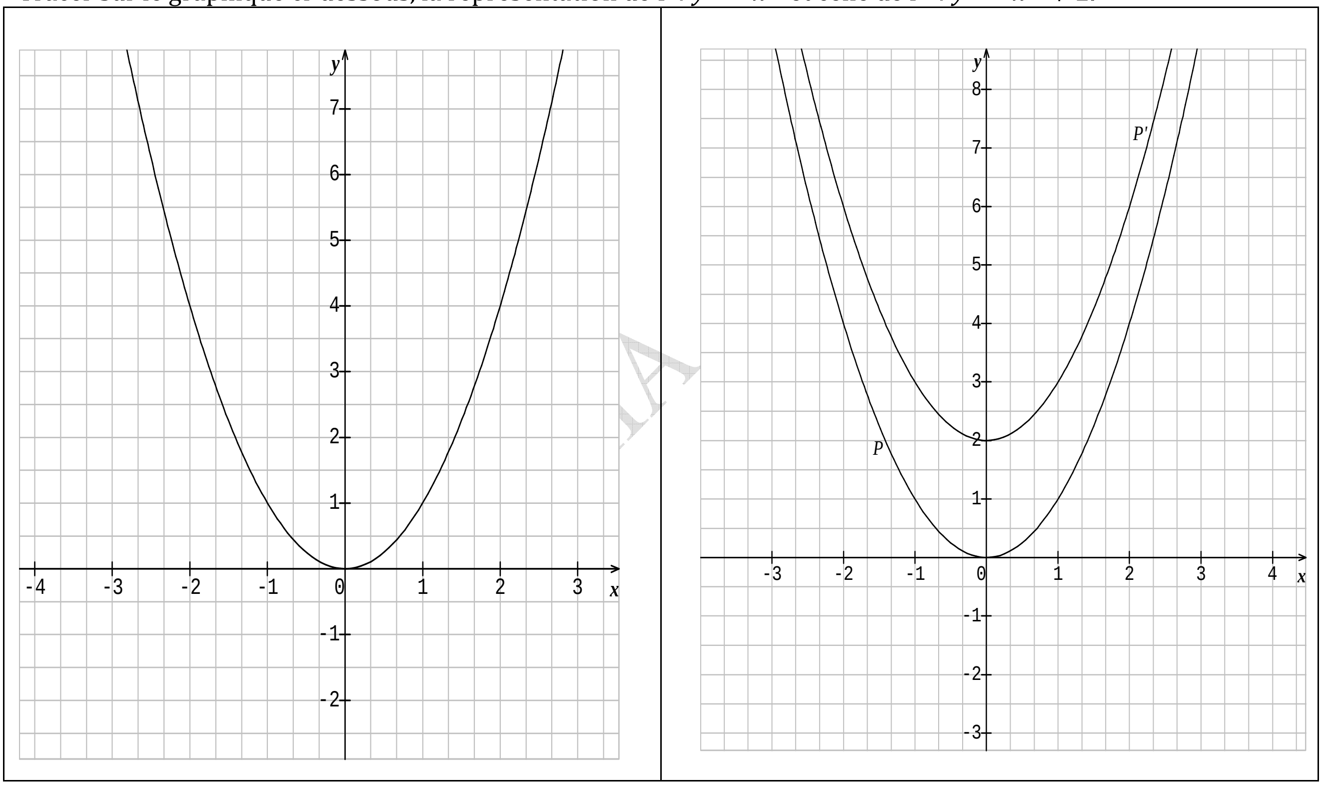
### 4) *Fonctions du type* $f(x) = x^2 + \alpha$

| |
|---|
| Tracé de la fonction $f(x) = x^2 + 2$ |

Compléter le tableau suivant :

| $x$ | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + 2$ | | | | | | | | | | |

Tracer sur le graphique ci-dessous, la représentation de P : $y = x^2$ et celle de $P'$ : $y = x^2 + 2$.




Observation: Le point M $(x\ ;\ y)$ appartient à P' si et seulement si $y = x^2 + 2$, soit $y - 2 = x^2$

Le point N $(x\ ;\ y - 2)$ appartient donc à la parabole P.

On passe de M à N (donc de P' à P), par une translation de vecteur ………… et de N à M (donc de P à P'), par une translation de vecteur …………….

En conclusion : Pour tracer $P'$ : $y = x^2 + 2$ à partir de P : $y = x^2$, on lui fait subir ……………………………

***Généralisation :***

| |
|---|
| Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{I}\ ;\ \vec{J})$ .<br>Soit $f$ la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2$ et P sa parabole. Soit g la fonction définie sur IR par :<br>$g(x) = x^2 + \beta$, ou $\beta$ un réel donné. On note P' la courbe représentative de g.<br>P' est l'image de la parabole P par la translation de vecteur $\beta\vec{J}$ son sommet est S $(0\ ;\ \beta)$ . et son axe de symétrie est la droite d'équation : $x = 0$ |

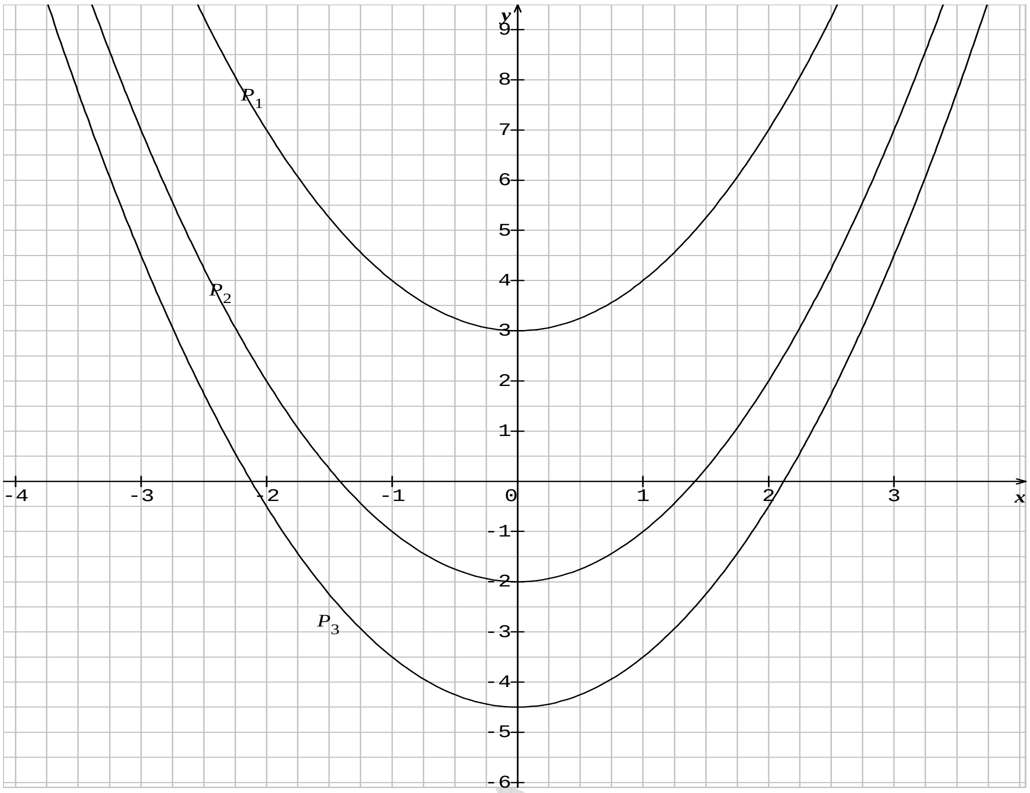
## Exercice corrigé

Le plan est rapporté à un repère orthogonal$(O\ ;\ \vec{I}\ ;\ \vec{J})$

Dans chacun des cas suivants, déterminer le sommet et l'axe de la parabole P, puis la construire.

a) $P_1 : y = x^2 + 3$ ;  b) $P_2 : y = x^2 - 2$ ;  c) $P_3 : y = x^2 - \frac{9}{2}$.

## Correction




La parabole $P_1$ a pour sommet $S_1$ (0 ; 3) son axe de symétrie est la droite d'équation : $x = 0$

La parabole $P_2$ a pour sommet $S_2$ (0 ; -2) son axe de symétrie est la droite d'équation : $x = 0$

La parabole $P_3$ a pour sommet $S_3$ (0 ; $-\frac{9}{2}$) son axe de symétrie est la droite d'équation : $x = 0$

### 5) *Fonctions du type $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$*

**Activité**

Le plan est rapporte a un repère orthogonal.

1) On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$ On désigne par C sa courbe représentative.

a) Vérifier que, pour tout réel $x$, $2x^2 + 4x - 1 = 2(x + 1)^2 - 3$.

b) Construire la parabole P d'équation y = $2(x + 1)^2$, puis la courbe C.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = ax^2 + ax + c$, ou $a, b$ et c des réels avec $a \neq 0$.

a) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x-p)^2 + q$, ou p et q sont deux réels que l'on déterminera en fonction de $a, b$ et c.

b) On admet que la courbe représentative de $f$ est une parabole. Déterminer son sommet et l'équation de son axe.

***Généralisation :***

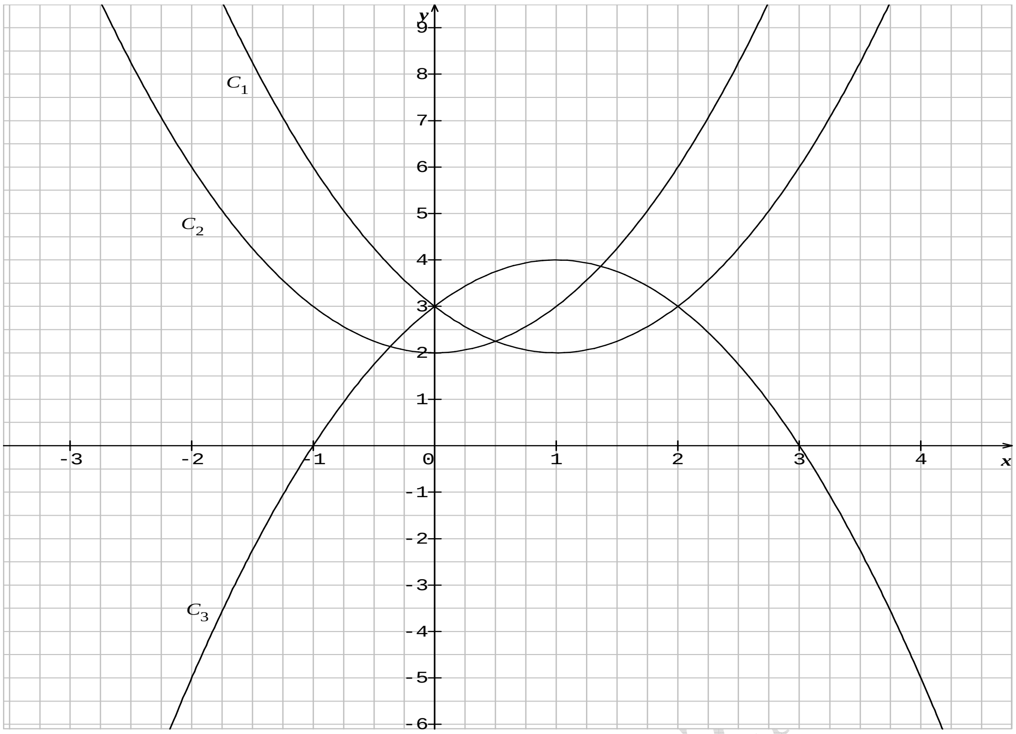
| |
|---|
| Soit $a, b$ et c trois réels avec $a \neq 0$.<br>Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = ax^2 + bx + c$. $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :<br>$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ou α et β sont deux réels.<br>Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur IR par :<br>$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est une parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation : $x = \alpha$. |

**Exercice1**

Dans le graphique ci-dessous, trois paraboles, courbes représentatives de trois fonctions trinômes $f, g$ et $h$ telles que

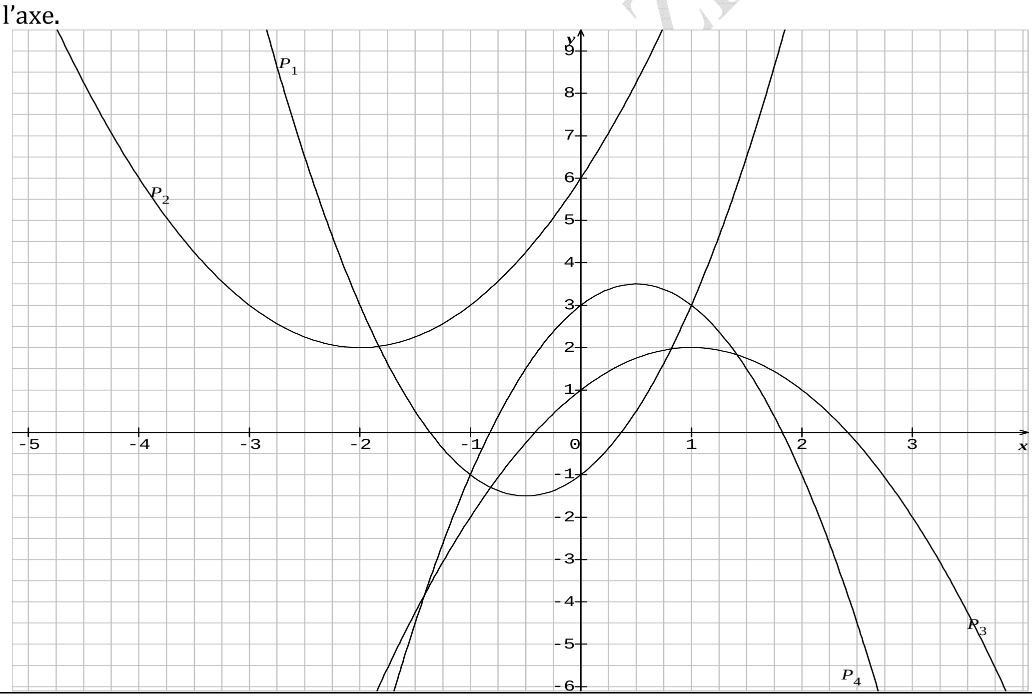
$f(x) = (x - 1)^2 + 2$ ;  $g(x) = x^2 + 2$  et  $h(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Associer à chaque fonction sa courbe représentative.




**Exercice2**

Dans le graphique ci-dessous, $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_4$ sont quatre paraboles. Pour chacune d'elles, préciser le sommet et l'équation de l'axe.




Théorème : $a \in IR^*$, $b \in IR$, $c \in IR$. Tout polynôme du 2nd degré, $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$P(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ ($b^2 - 4ac$ est le discriminant noté $\Delta$)

Remarque pratique : $P(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$

Théorème : La représentation graphique d'une fonction polynôme définie sur IR par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole. Son sommet S ($\alpha$, $\beta$) a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée $\beta = P(\alpha)$.

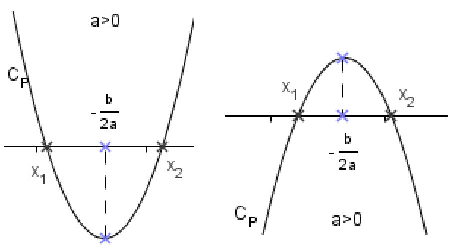
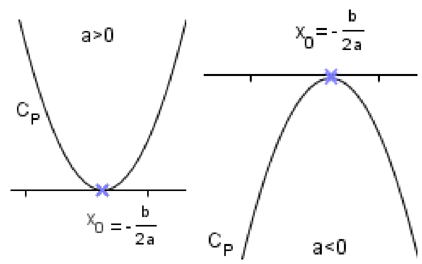
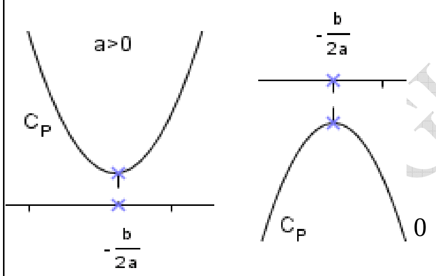
- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
- Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

Théorème : Soit $f$ un trinôme avec $f(x) = ax^2 + bx + c$

- *Si $\Delta > 0$,* alors f admet deux racines

- *Si Δ = 0* alors *f* admet une racine (double)
- *Si Δ < 0* alors *f* n'admet pas de racine.

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre l'équation $P(x) = 0$ c'est-à-dire chercher les racines de P
Graphiquement, les solutions de $P(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $C_P$ avec l'axe des abscisses
L'existence des solutions dépend du signe du **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

<table>
<tr><th>Représentation :<br>Parabole</th><th>Nombres de racines<br>Valeur des racines</th><th>Signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$</th><th>Factorisation</th></tr>
<tr><td>Δ > 0<br></td><td>Deux racines :<br>$x_1$ et $x_1$<br>$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$<br>$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td><table><tr><td>$x$</td><td>-∞</td><td>$x_1$</td><td>$x_2$</td><td>+∞</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="4">signe de …   signe de …   signe de…</td></tr></table></td><td>$P(x) = \ldots$</td></tr>
<tr><td>Δ = 0<br></td><td>Une racine<br>$x_0 = \frac{-b}{2a}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>-∞</td><td>$x_0$</td><td>+∞</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="3">signe de …   signe de….</td></tr></table></td><td>$P(x) = \ldots$</td></tr>
<tr><td>Δ < 0<br></td><td>Aucune racine réel</td><td><table><tr><td>x</td><td>-∞</td><td>+∞</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">Signe de …</td></tr></table></td><td>Pas de factorisation</td></tr>
</table>

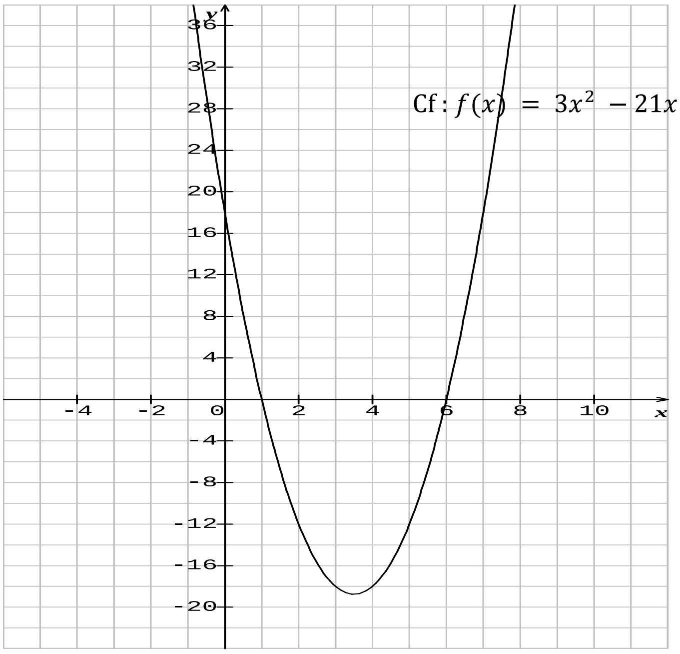


**Exercice corrigé**

Soit *f* la fonction définie sur IR par $f(x) = 3x^2 - 21x + 18$
1) Déterminer les racines de *f* : *(a = 3 ; b =-21 ; c = 18)*
Racines de *f* : $\Delta = b^2 - 4ac = (-21)^2 - 4 \times 3 \times 18$ . $\Delta = 225$
$\Delta > 0$ donc *f* admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-21)-\sqrt{225}}{2\times3} = 1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-21)+\sqrt{225}}{2\times3} = 6$
2) En déduire le signe de *f(x)* sur IR (Cf est une parabole tournée vers le haut. Elle coupe l'axe des abscisses en 1 et 6)
<u>Tableau de signes de *f(x)* :</u>

| *x* | -∞ | | 1 | | 6 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | | + | 0 | - | 0 | + | |

3) Résoudre $f(x) \geq 0$
D'après le tableau de signe de *f*, l'inéquation a pour solution : ]-∞ ; 1]U[6 ; +∞ [




## 6) *Fonctions du type $f(x) = \sqrt{x+b}$*

### 1. Étude de la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$

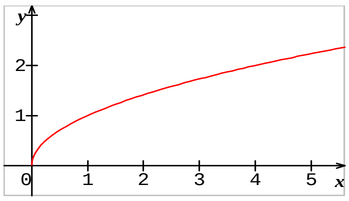
La fonction : $f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $IR_+$

**Propriété 1** La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

**•Tableau de variations**

| $x$ | $0$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $0 \nearrow$ |

**• Représentation graphique**



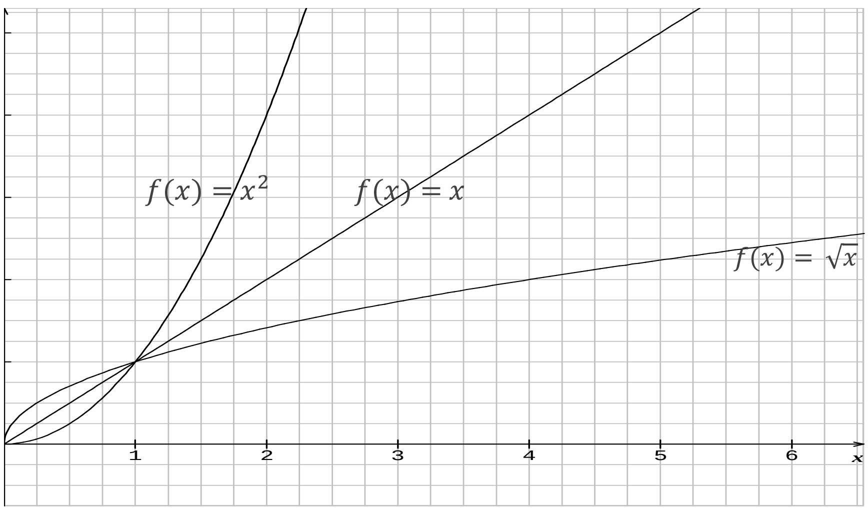

**Démonstration 1 :**

Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $0 \leq a < b$. On a donc $b - a > 0$.$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})\times(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \frac{b-a}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$
or $(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > 0$, donc $f(b) - f(a)$ est du signe de $(b - a)$. Ainsi $f(b) - f(a) > 0$ et donc $f(a) < f(b)$.
La fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

**2.** Positions relatives de $x$, $\sqrt{x}$ et $x^2$ (pour $x$ positif)

**Propriété 2** * Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\,;1]$ , $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

* Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[1\,;+\infty[$ , $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$



**Démonstration 2 :**

- $0 \leq x \leq 1$. En multipliant chacun des membres par $x$ , on obtient donc $0 \leq x^2 \leq x$ (1)

La fonction racine carrée étant croissante sur $[0 ; +\infty[$ , on peut écrire :$\sqrt{0} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x}$ , donc $0 \leq x \leq \sqrt{x}$ (2)

Finalement, on déduite de (1) et (2) que $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

- $1 < x$ On multiplie chacun des membres par $x$ , on obtient $x < x^2$.

Puisque la fonction racine carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ , alors $\sqrt{x} < x$ . Ainsi $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

**Activité**

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ .Soient $f$ et $g$ les fonctions de IR vers IR telles que: $f(x) = \sqrt{x}$ ; $g(x) = \sqrt{x+2}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction g.

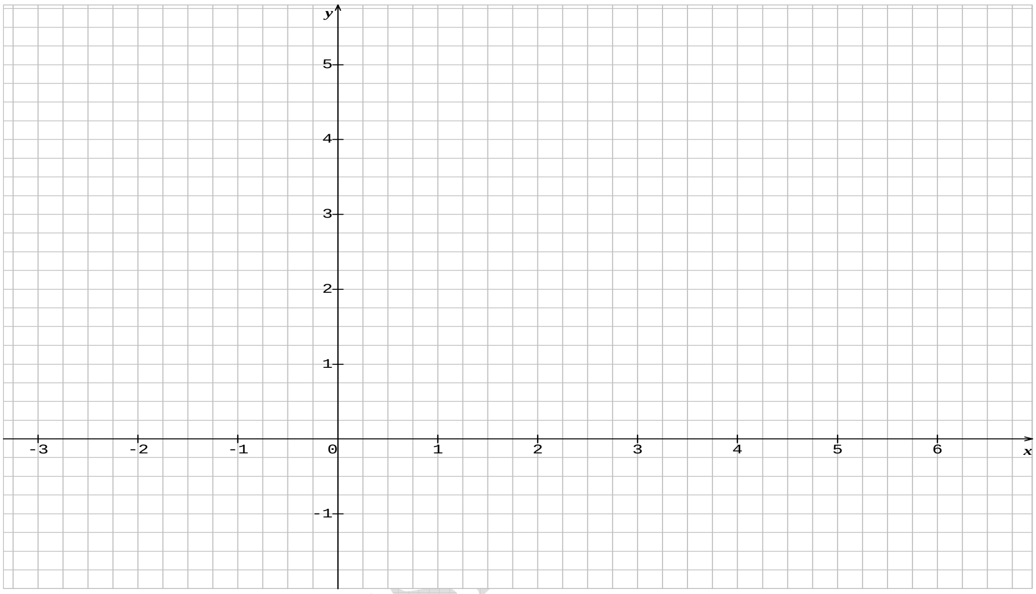
b) Etudier les variations de $g$ sur D.

2) On désigne par C et C' les courbes représentatives de $f$ et $g$.

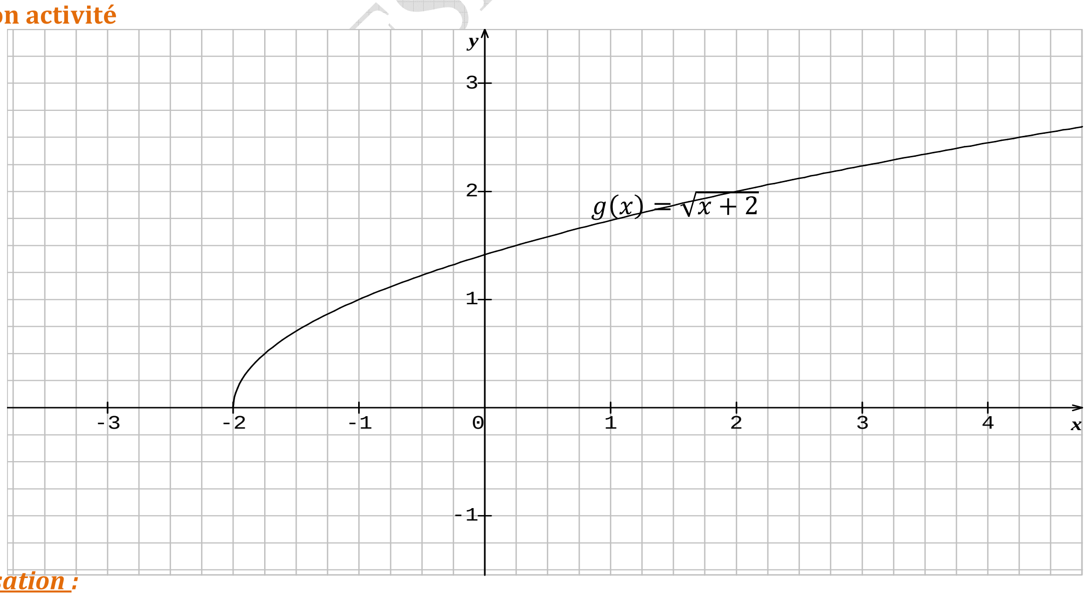
On considère la translation T de vecteur $-2\vec{I}$ . Soit M$(x , y)$ un point du plan et M'$(x' , y')$ son image par T.

Montrer que M$(x , y)$ appartient à C équivaut à M'$(x' , y')$ appartient à C '.

Tracer la courbe C puis la courbe C' dans le même repère ci dessous.

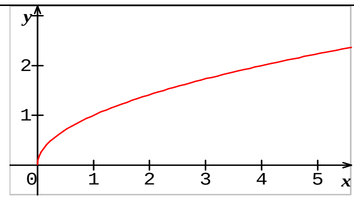


**Correction activité**




***Généralisation :***

Le plan est muni d'un repère orthogonal$(O ; \vec{I} ; \vec{J})$.
Ci-contre, la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par :
$\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x}}$
La courbe représentative de la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x+b}$ est l'image par la translation de vecteur $-b\vec{i}$ de la courbe de la fonction $g$ définie sur $[0 , +\infty[$ par $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x}}$



## 7) La fonction inverse. *Fonctions du type* $f(x) = \frac{a}{x}$

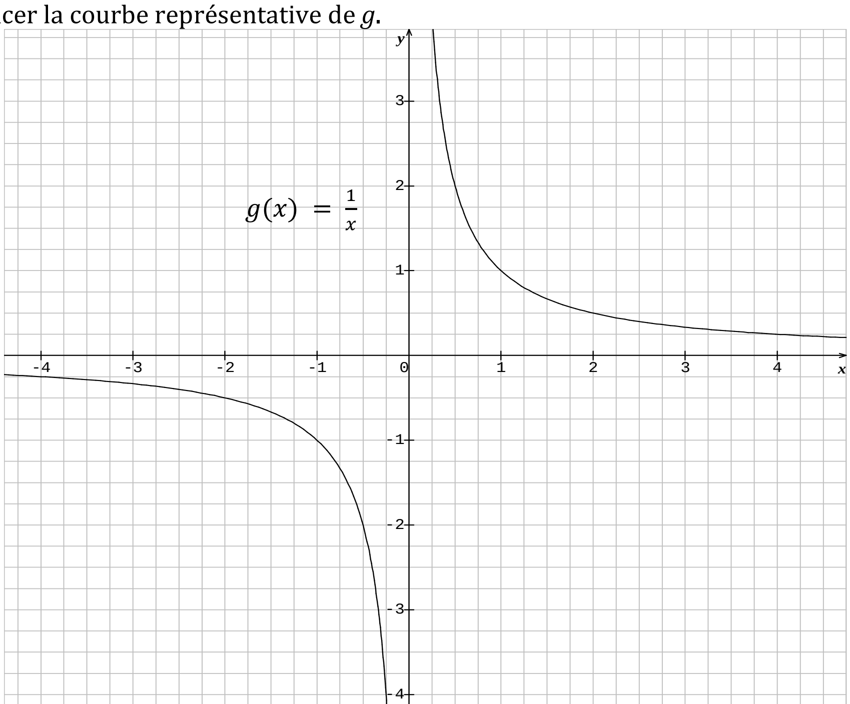
Il s'agit de la fonction $g$ définie sur l'intervalle I=$]-\infty\,; 0[\,\cup\,]0\,; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x}$.

a) Tracé point par point de la courbe représentative de $g$

Tableau de valeurs :

| $x$ | -5 | -3 | $-\frac{5}{2}$ | -2 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{5}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{2}{3}$ | -1 | -2 | -4 | 4 | 2 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ |

On peut alors tracer la courbe représentative de $g$.




La courbe représentative de $g$ s'appelle une **hyperbole**.

b) Etude de la parité de $g$

Soit $x \in$ I alors $-x \in$ I.

Comparer $g(x)$ et $g(-x)$ : $g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$. On dit que ***g* est une fonction impaire.**

Graphiquement, cela signifie que les points M($x$ ; $g(x)$) et M'($-x$ ; $g(-x)$) qui sont des points de la courbe représentative de $g$ sont symétriques par rapport à **l'origine du repère**.

La représentation graphique de $g$ admet donc **l'origine du repère** pour **centre de symétrie**.

c) sens de variation de $g$

D'après le graphique, on peut établir le tableau de variation de $g$.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g$ | ↘ | ‖ | ↘ |

$g$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,; 0[$ et sur $]0\,; +\infty[$.

Par le calcul : si $a$ et $b$ sont deux réels non nuls tels que $a < b$.

$g(a) - g(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$

Si $a$ et $b$ sont strictement positifs, $ab > 0$ et comme $b - a > 0$, on déduit que $g(a) - g(b) > 0$

Donc $g$ est strictement décroissante sur $]0\,; +\infty[$.

Si $a$ et $b$ sont strictement négatifs, $ab < 0$ et comme $b - a > 0$, on déduit que $g(a) - g(b) > 0$

Donc $g$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,; 0[$.

***Généralisation :***

***Fonctions du type*** $f(x) = \frac{a}{x}$ ; $a \neq 0$

Le plan est muni d'un repère orthogonal$(O\,; \vec{I}\,; \vec{J})$ .Soit $a$ un réel non nul.

La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur IR* par $f(x) = \frac{a}{x}$ est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

**Exercice**

1) Soit le fonction affine définie par $f(0) = 4$ et $f(2) = 0$.

a- Déterminer l'équation de la courbe représentative de $f$.

b- Tracer cette courbe dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm pour $x \in [\,0\,;\,4\,]$. Soit $(\Delta)$ cette courbe représentative.

2) Déterminer l'équation de la droite (D) parallèle à $(\Delta)$ passant par l'origine des axes.

3) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{2}{x}$.

a- Dans le même repère, tracer la courbe (C) représentative de $g$, sur l'intervalle $]\,0\,;\,4\,[$.

b- Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection de $(\Delta)$ et (C).

## 8) *Fonctions du type* $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta$

**Activité**

Le plan est muni d'un repère orthogonal$(O\,;\,\vec{I}\,;\,\vec{J})$. On désigne par H l'hyperbole d'équation :$y = \frac{1}{x}$

On considère la fonction $f$ définie sur IR* par $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ et on note C sa courbe représentative.

a) Montrer que C est l'image de H par la translation de vecteur $2\vec{J}$.

b) On admet que la courbe C est une hyperbole.

Préciser le centre et les asymptotes de C.

c) Tracer H et C dans le même repère.

***Généralisations :***

***Fonctions du type*** $f(x) = \frac{a}{x} + \beta$ ***; a ≠ 0***

Le plan est muni d'un repère orthogonal$(O\,;\,\vec{I}\,;\,\vec{J})$ .Soit $a$ un réel non nul. La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur IR* par $f(x) = \frac{a}{x} + \beta$ est une hyperbole de centre I( 0 ; $\beta$ ) et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = \beta$.

***Fonctions du type*** $f(x) = \frac{a}{x+\alpha}$ ***; a ≠ 0***

Le plan est muni d'un repère orthogonal$(O\,;\,\vec{I}\,;\,\vec{J})$ .

Soit $a$ un réel non nul et $\alpha$ un réel. La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur IR/$\{-\alpha\}$ par $f(x) = \frac{a}{x+\alpha}$ est une hyperbole de centre I( $\alpha$ ; 0 ) et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\alpha$ et $y = 0$.

***Fonctions du type*** $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$***; c ≠ 0***

Le plan est muni d'un repère orthogonal$(O\,;\,\vec{I}\,;\,\vec{J})$ .

Soit $a, b, c$ et $d$ quatre réels, avec c non nul. La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur IR / $\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est une hyperbole de centre I( ; $\frac{a}{c}$) et d'asymptotes les droites d'équations $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$.

**Exercice** *Colorer en rouge la fonction* $f(x) = \frac{2x-1}{4x+2}$ *Colorer en vert la fonction* $g(x) = \frac{2}{x+3}$

Colorer en bleu la fonction $h(x) = \frac{1}{x}$ Colorer en jaune la fonction $p(x) = \frac{1}{x} - 3$