REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION Lycée Ibn Khaldoun Jammel- Monastir		Mr : Afli Ahmed Bac blanc 2016	
SECTION :	Mathématiques		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4h	COEFFICIENT : 4

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie

❖ Exercice n°1:(3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des propositions est vraie.
Recopier le numéro et la lettre correspondante à la réponse juste.
Aucune justification n'est demandée.

1.) Pour une loi exponentielle de paramètre λ, la densité de probabilité est une solution de l'équation différentielle :

(a) $Y'' + \lambda^2 y = 0$ (b) $y' - \lambda y = 0$ (c) $y' + \lambda y = 0$

2.) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x =$ (a) 1 (b) e (c) $+\infty$

3.) Pour $x \geq 1$ on a : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{x^2} dt}{x-1} =$ (a) $+\infty$ (b) e (c) 1

4.) Le nombre de solution, dans $\mathbb{Z}$, de l'équation $x^2 \equiv 2[4]$ est :

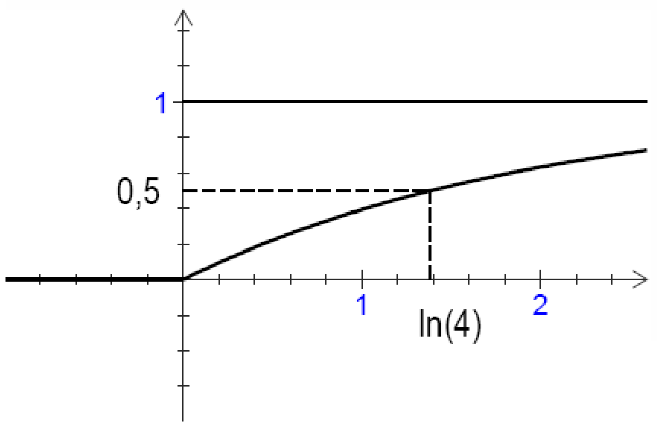
(a) 0 (b) 1 (c) 2

5.) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et 0,75, (n$\in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) .
Alors P(X $\geq$ 1) =

(a) $1-(0,75)^n$ (b) $(0,75)^n$ (c) $1-(0,25)^n$

6.) La courbe ci-contre est celle de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle alors P(X$\geq$ 10) =

(a) $\frac{1}{e}$ (b) $\frac{1}{e^5}$ (c) $\frac{1}{e^{10}}$

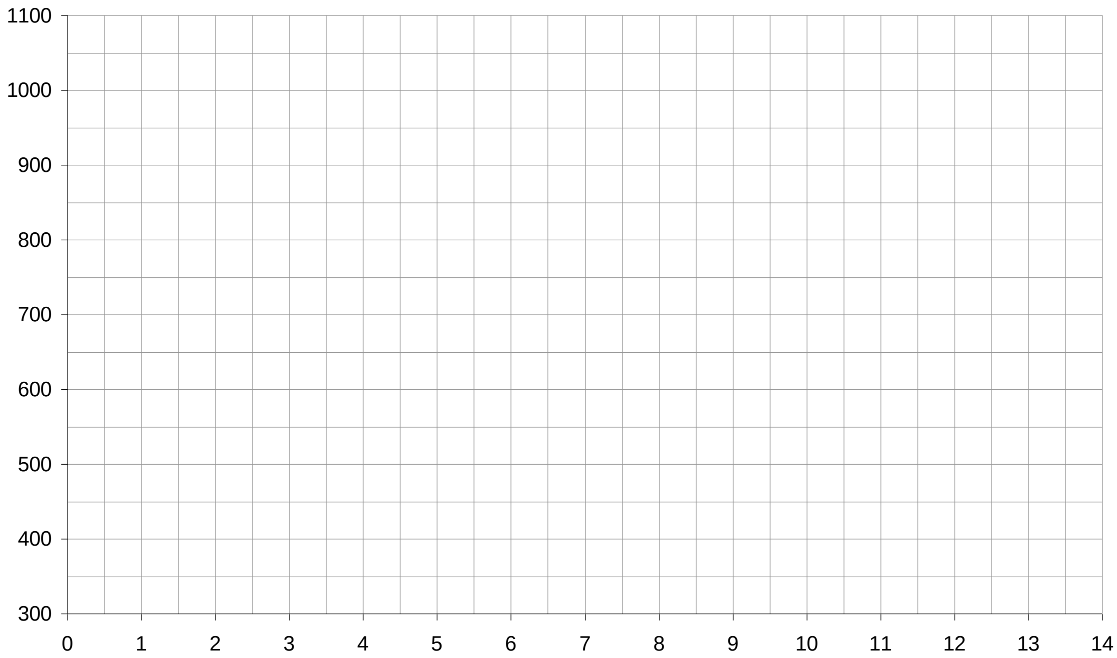


❖ Exercice n°2: (3 points)

Le tableau suivant donne la moyenne mensuelle du cours du blé à Chicago exprimé en cents/boisseau de janvier à décembre 2007.

Rang x_i du mois	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Moyenne mensuelle du cours y_i (cents/boisseau)	466,1	464,7	459,5	471,2	486	573,5	613,3	691,8	863	853,7	791,7	916,7

1.)a. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i ; y_i)$ dans le repère orthogonal ci-dessous (unités graphiques : 1 cm pour un mois en abscisse et 1 cm pour 100 cents en ordonnée).



b. Donner l'équation de la droite *D* d'ajustement de *y* en *x* obtenue par la méthode des moindres carrés. Les résultats seront donnés à 10^{-3} près. Tracer la droite *D* dans le repère précédent.

2.) La forme du nuage de points permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$.

a. Compléter le tableau suivant (les valeurs de z_i seront arrondies à 10^{-3}.)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	466,1	464,7	459,5	471,2	486	573,5	613,3	691,8	863	853,7	791,7	916,7
$z_i = \ln y_i$	6,144	6,141	6,13									

a. L'équation de la droite d'ajustement de *z* en *x* obtenue par la méthode des moindres carrés est $z = 0,0725x + 5,951$.

En déduire l'expression de *y* en fonction de *x* de la forme $y = \alpha e^{\beta x}$ avec α arrondi au centième.

3.) La moyenne du cours du blé pour le mois de février 2008 était de 1059 cents/boisseau.

Lequel de ces deux ajustements semble le plus proche de la réalité ?

❖ Exercice n°3: (4 points)

1.) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation : 7x - 13y = 2 (E)

a. Montrer que si (x , y) est solution de (E) alors $x \equiv 4[13]$

b. Résoudre alors l'équation (E).

2.) Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation : 7x - 13y = - 4 (E').

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 5[13] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$

3.) Montrer qu'un entier n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv 31(mod 91)$

4.) Pour tout entier n , on pose a = 13n - 8 et b = 7n - 4

a. Montrer que le couple (a, b) est une solution de l'équation (E').En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$.

b. Déterminer l'ensemble des entiers n pour les quels $a \wedge b = 2$.

❖ Exercice n°4: (4 points)

Une usine fabrique des appareils, un contrôle de qualité a montré que :

- 14% des appareils présentent un défaut D_1
- 10% présente le défaut D_2
- 4% présentent les deux défauts D_1 et D_2 .

Un appareil est défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

On note D_1 : « l'appareil présente le défaut D_1 » : D_2: « l'appareil présente le défaut D_2 »

1.) Les événements D_1 et D_2 sont-ils indépendants ?

2.) Sachant que l'appareil présente le défaut D_1 , calculer la probabilité pour qu'il présente le défaut D_2.

3.) Montrer que la probabilité de l'événement D : « l'appareil est défectueuse » est égale à $\frac{1}{5}$

4.) Un commerçant reçoit n appareils indépendants, n $\geq$ 2 pour l'exposer l'un à coté de l'autre.

Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre d'appareils défectueux.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

c. Le commerçant veut que sur sa commande, la probabilité p_n d'avoir au moins un appareil défectueuse reste inferieur à 50%, déterminer la maximale de n.

5.) La durée de vie d'un appareil défectueuse suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 3.10^{-2}$

Et la durée de vie en année d'un appareil non défectueuse suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-5}$.

On achète un appareil au hasard, on désigne par Y la variable aléatoire qui indique sa durée de vie en année.

a. Montrer que pour $t \in [0, +\infty[$ on a : $P(Y \geq t) = \frac{1}{5}e^{-\lambda_1 t} + \frac{4}{5}e^{-\lambda_2 t}$.

b. Calculer la probabilité que l'appareil ne tombe pas en panne au bout de 5 ans.

c. Sachant que l'appareil acheté dépasse 5 ans, quelle est la probabilité qu'il soit défectueuse.

- **Exercice n°5: (6 points)**

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$

et on cherche l'ensemble des solutions, définies sur $]0\,;+\infty[$, de cette équation.

1. a. Démontrer que la fonction u définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $u(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de (E) .

b. Démontrer qu'une fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si, la fonction $g - u$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y - y' = 0$.

c. En déduire toutes les solutions définies sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation (E) .

2.) Pour tout réel k non nul, on considère la fonction f_k définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par : $f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x$.

a. Déterminer selon les valeurs de k la limite de f_k en $+\infty$.

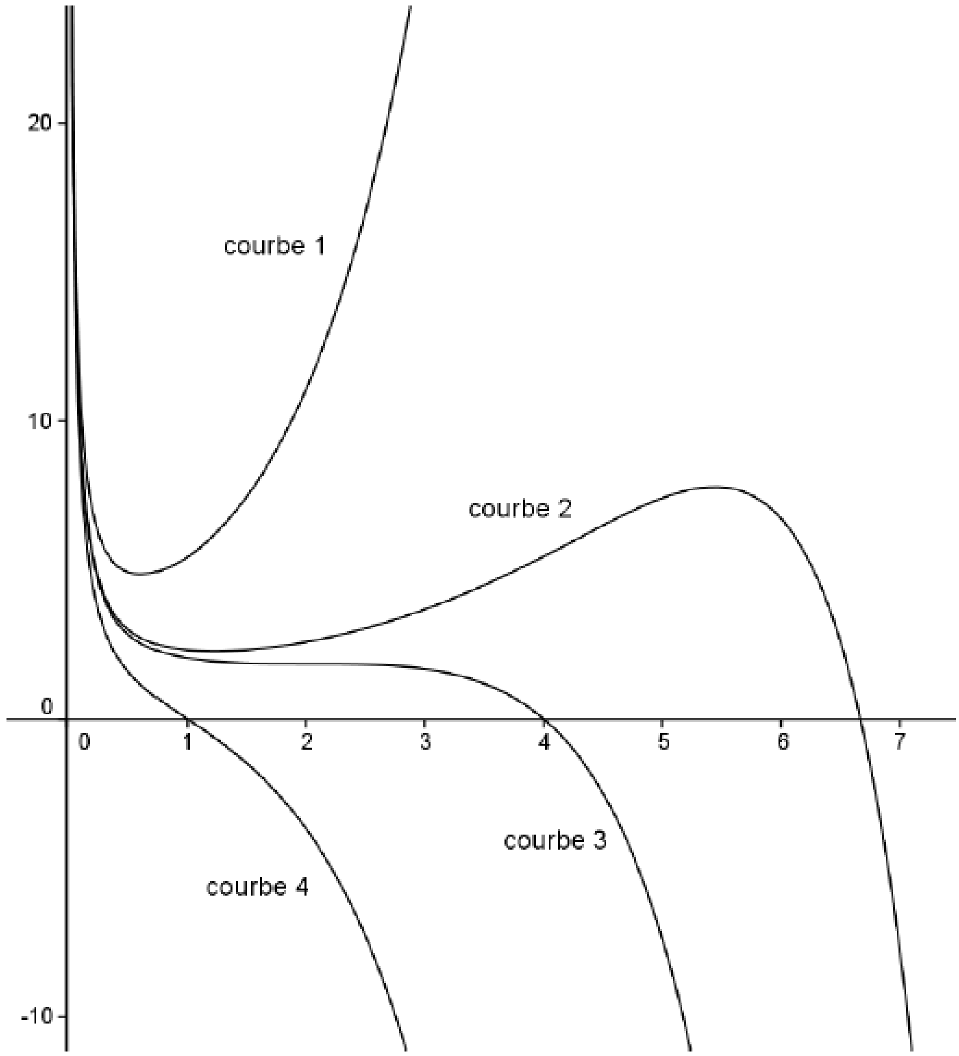
b. Déterminer la limite de f_k en 0.

c. Prouver que la dérivée de f_k est definie par $f'_k(x) = \left(kx^2 + x - 1\right)\frac{e^x}{x^2}$.

d. Déterminer suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $f'_k(x) = 0$.

e. On a tracé sur le graphique ci-dessous les courbes des fonctions f_1 , f_{-1} , $f_{-0,25}$ et $f_{-0,15}$.

Attribuer à chaque fonction sa courbe : les réponses devront être justifiées.



Annexe à rendre avec la copie

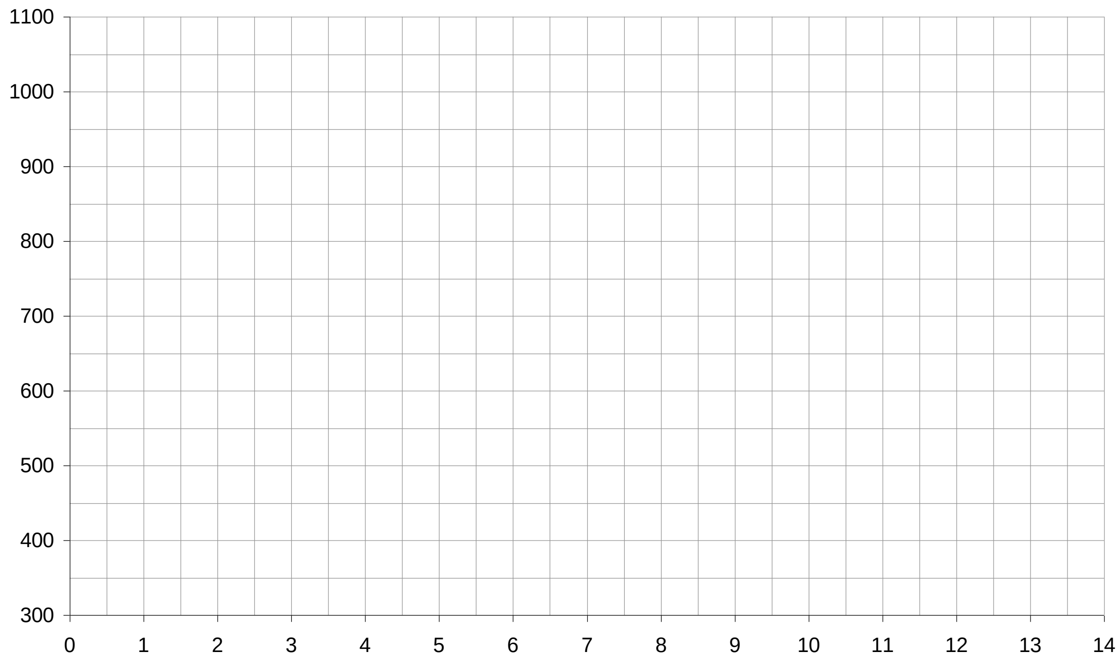
Nom et prénom :……………………………………………………..4M

❖ **Exercice 1 :**

Questions	1	2	3	4	5	6
Réponses						

❖ **Exercice 2 :**

Question 1.)a.



Question 2.)a.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	466,1	464,7	459,5	471,2	486	573,5	613,3	691,8	863	853,7	791,7	916,7
$z_i = \ln y_i$	6,144	6,141	6,13	……..	…….	…….	……..	……..	……..	……..	………	………