Exercice N°1

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_k(x)=\ln\left(e^x+kx\right)-x$. Soit C_k la courbe représentative de f_k dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unités : 5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur celui des ordonnées).

Etude préliminaire

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-x$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire que, pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1+a)\le a$.

Partie A : étude de f_1

1. Calculer $f_1'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_1.
2. Montrer que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f_1(x)=\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : étude et propriétés de f_k

1. Calculer $f_k'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k.
2. Montrer que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$.
3. a. Dresser le tableau de variation de f_k.

b. Montrer que, pour tout réel x de $[0,+\infty[$, on a $f_k(x)\le\frac{k}{e}$.

4. Déterminer une équation de la tangente (T_k) au point d'abscisse 0 de C_k.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p<m$. Etudier la position relative de C_p et C_m.
6. Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes en 0.

Partie C : majoration d'une intégrale

Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_k et les droites $x=0$ et $x=\lambda$.

1. Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda)\le k\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$.
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$.
3. On admet que $A(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to\infty}A(\lambda)\le k$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice N°2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative C est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à C.

c. Étudier la position relative de C et Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$ etmontrer que $f'(x)=xe^{-x}+2\left(1-e^{-x}\right)$.

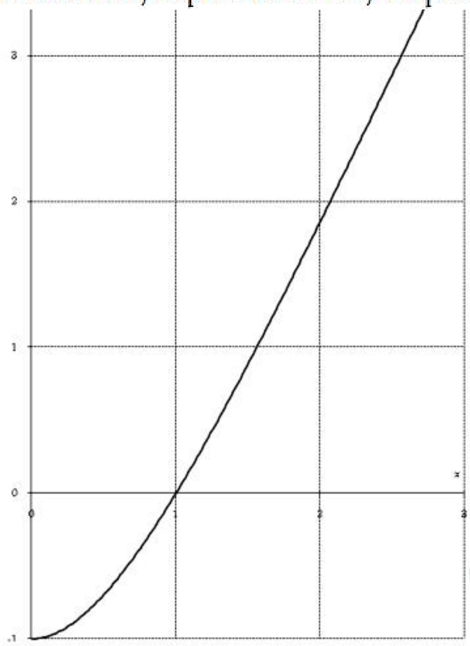
b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x)>0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

4. a. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ.

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



Exercice N°3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction g dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que $g'(x)$ est du signe de $(1 - x^2)$. En déduire les variations de g

2. Montrer que :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et préciser l'asymptote à C correspondante.

3. Tracer la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 3.

4. a. Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.

b. Prouver rigoureusement que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution α et une seule. Prouver que α appartient à l'intervalle $[-2\ ;-1]$.

c. Montrer que α vérifie la relation $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

Exercice N°4

Dans tout le problème $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan P.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. On appelle C la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1. Etude de f:

a. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier vos calculs.

b. Préciser les équations des asymptotes.

2. Donner l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f. Préciser $f(0)$.

3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $x=0$; on note T_0 cette tangente.

4. Courbe :

a. Soit x un réel quelconque. Calculer $f(x)+f(-x)$.

b. Quelle propriété de symétrie peut on déduire de la question précédente ?

c. Tracer C, ses asymptotes et la tangente T_0.

Partie B

1. a. Soit $u(x)=1+e^{-x}$. Calculer $u'(x)$.

b. En déduire la primitive F de f qui prend la valeur $-\ln 2$ en $x=0$.

2. a. On pose $A=\int_0^1 f(x)dx$. Calculer A.

b. Déterminer le réel c tel que $A=\ln c$.

3. Pour tout entier naturel n non nul on pose $v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice N°5

A.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4\dfrac{e^x}{e^x+1}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ .En déduire les droites asymptotes à C.
2. Etudier les variations de f et en dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que le point d'intersection A de C et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour C.
4. Donner une équation de la tangente à C en A.
5. Tracer sur un même graphique : C, sa tangente au point A, et ses droites asymptotes.

B.

On considère la fonction f', dérivée de f. On note C' sa courbe dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. En utilisant le fait que C admet le point A comme centre de symétrie, justifier que f' est une fonction paire.

2. Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les droites asymptotes à C'.

3. Montrer que $f''(x) = 4\dfrac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3}$; étudier les variations de f' et dresser son tableau de variations.

4. Tracer C' sur le même graphique que C.

5. Justifier la position de C' par rapport à C.

C.

1. a. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

1. b. Soit F, la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $x = 0$, et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

Quel est le sens de variation de F ?

2. Expliciter $F(x)$, pour tout x réel.

3. a. Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire une propriété de la courbe Γ.

3. b Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 4x - 4\ln 2$ est asymptote à Γ.

4. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

5. Tracer Γ et ses asymptotes sur une autre feuille de papier millimétré.

Exercice N°6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite D_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe C.

c. Étudier la position de C par rapport à D_1.

2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2.$$

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Que peut-on dire de la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse $\ln 3$?

b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe C par rapport à D_2.

4. a. Montrer que la tangente D_3 à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la tangente D_3 sur l'intervalle $]-\infty ; \ln 3]$. On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = \dfrac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}$.

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe C. Tracer la courbe C, les tangentes D_2, D_3 et les asymptotes à la courbe C .On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.

6. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$.

b. Soit λ un réel strictement négatif.

On note $A(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par D_1, C et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=0$. Montrer que $A(\lambda)=4\ln 4-4\ln\left(e^{\lambda}+3\right)$.

c. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$.

Exercice N°7

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) Pour tout nombre réel x, $\left(f'(x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2=1$.

(2) $f'(0)=1$

(3) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que la dérivée de u^n est $nu'u^{n-1}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)\neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) Pour tout nombre réel x, $f''(x)=f(x)$.

où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f.

3. On pose $u=f'+f$ et $v=f'-f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u'=u$ et $v'=-v$.

c. En déduire les fonctions u et v.

d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. a. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. a. Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x)=m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer cette solution lorsque $m=3$ (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

Exercice N°8

Soit la fonction f définie par $f(x)=xe^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c. construire Γ.

2. a. Montrer que pour tout réel m de l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions.

b. Dans le cas où $m=\dfrac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions, (avec $\alpha<\beta$). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Résoudre l'équation $f(x)=m$ dans le cas où $m=0$ et $m=\frac{1}{e}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=u_n e^{-u_n} \end{cases}$ où α est le réel défini à la question A. 2. b.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ؟ Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n=\ln u_n$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n=w_n-w_{n+1}$.

b. On pose $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$. Montrer que $S_n=w_0-w_{n+1}$.

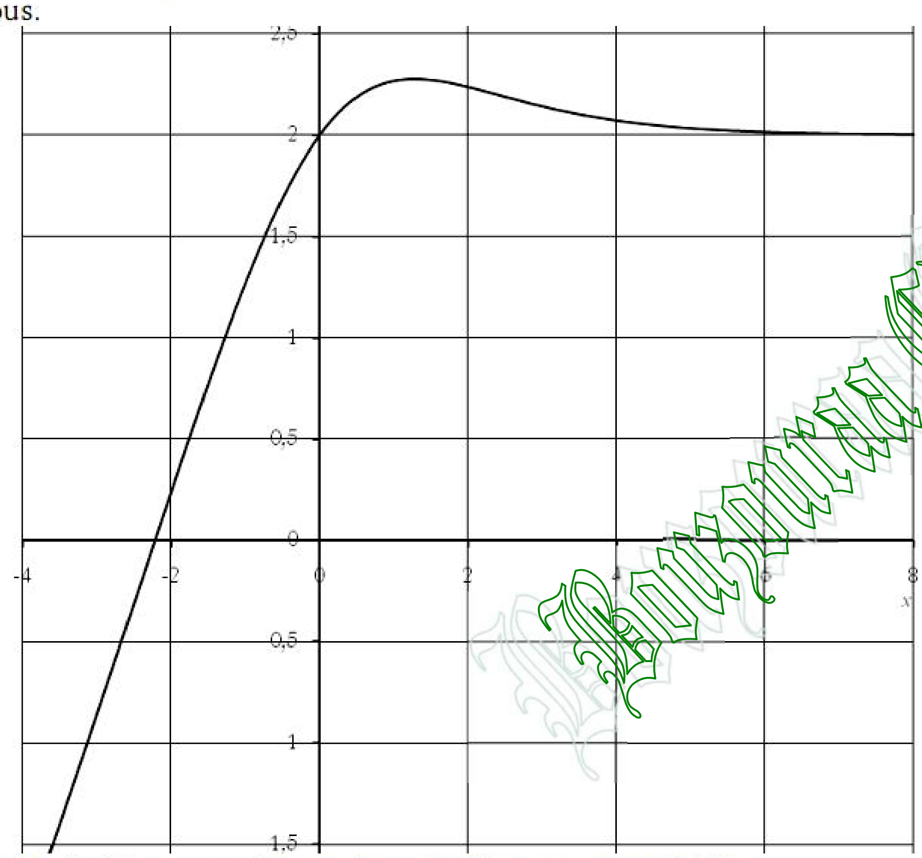
c. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0, $v_0>0$, et pour tout entier n, par $v_{n+1}=v_n e^{-v_n}$. Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout entier $n\geq 1$, on ait $u_n=v_n$ ؟ Si oui, préciser laquelle.

Exercice N°9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{e^x+1}+2$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$; cette représentation est fournie ci-dessous.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite (d) d'équation $y=x+2$ est une asymptote pour C_f.

c. Étudier la position de C_f par rapport à (d).

3. Pour tout entier naturel n, tel que $n \geq 2$, on note D_n l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient : $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$ et on appelle A_n son aire, exprimée en unités d'aire.

a. Faire apparaître D_5 sur la figure.

b. Démontrer que pour tout x , tel que $x \geq 2$, on a : $\frac{7}{8}xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x+1} \leq xe^{-x}$.

c. On pose $I_n = \int_2^n xe^{-x}\,dx$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

d. Écrire un encadrement de A_n en fonction de I_n.

e. On admet que A_n a une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$ ¿ Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.