ARITHMETIQUE

I/ *Divisibilité dans $\mathbb{Z}$:*

Définition **:**
Soit a et b deux entiers relatifs.
On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier relatif k tel que a=k.b
⁕ Si de plus b≠0, alors on dit aussi que a est divisible par b ou b divise a ou encore b est un diviseur de a. On note b|a.

Exercice1 :

Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $3^{n+2} + 3^n$ est un multiple de 10.

Exercice 2 :

a) Vérifier que $\frac{n+5}{n-2} = 1+\frac{7}{n-2}$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}$.

b) En déduire les entiers relatifs n tels que n−2 divise n+5

Remarques :

1) ⁕ L'ensemble des diviseurs d'un entier relatif n se note D_n
   ⁕ L'ensemble des multiples d'un entier relatif n se note M_n
2) $D_0 = \mathbb{Z}$, $D_1 = D_{-1} = \{1,-1\}$, $D_{-15} = \{1,3,5,15,-1,-3,-5,-15\}$
3) Soit p un nombre premier alors $D_p = \{1,-1,p,-p\}$
4) Tout entier relatif n >1 admet <u>au minimum</u> 4 diviseurs 1,-1,n,-n.
5) Tout entier relatif non nul divise 0, mais 0 ne divise aucun entier relatif.

Propriétés :
a, b et c désignent des entiers relatifs non nuls.
⁕ Si a divise b alors –a divise b.
⁕ Si a divise b et b divise a alors a=b ou a= −b.
⁕ Si a divise b et b divise c alors a divise c.
⁕ Si a divise b, alors k.a divise k.b $\forall k \in \mathbb{Z}^*$
⁕ Si a divise b et c alors pour tous entiers relatifs n et m, a divise n.b+m.c

Exercice 3 :

Soit deux entiers relatifs a=5n+1 et b=3n+2. Soit d un entier relatif non nul qui divise à la fois les entiers a et b.

1) Montrer que d divise 7.
2) En déduire les valeurs de d.

Exercice 4 :
Répondre par vrai ou faux :
1) L'entier $42^{100} + 35^{100}$ est divisible par 7.
2) L'entier $26^{2016} + 17$ est divisible par -13.

II/ *Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:*

Théorème (admis)
Soit a un entier relatif et b un entier relatif non nul. Il existe un unique couple (q,r) d'entiers relatifs vérifiant à la fois : $a=b.q+r$ et $0 \leq r < |b|$

Définition :
Soit a un entier relatif et b un entier relatif non nul.
Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver le couple d'entiers relatifs (q,r) tel que : $a=b.q+r$ et $0 \leq r < |b|$.
q est le quotient, r est le reste, a est le dividende et b est le diviseur.

Recherche du quotient et du reste:

- Si $b > 0$, alors q est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$
- Si $b < 0$, alors q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{a}{b}$
- ■ Dans les deux cas le reste $r = a-bq$

Remarque :
Le reste r est un élément de l'ensemble $\{0,1,2,\ldots,|b|-1\}$

Exercice 5 :
En tapant 12354878 ÷ 23458 = La calculatrice affiche le résultat 526,6807…
Donner alors le quotient q et le reste r de la division de a par b dans chacun des cas suivants :
1) a=-12354878 et b = 23458
2) a=12354878 et b = -23458
3) a=-12354878 et b = -23458

Exercice 6 :
1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier relatif n par 3.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $n^3 - n$ est un multiple de 3.

Exercice 7 :
1) Montrer que le produit de 2 entiers relatif consécutifs est un nombre pair.
2) Soit un entier relatif impair. Montrer que n^2-1 est divisible par 8.

Remarque :
Pour un entier relatif b non nul fixé, on peut classifier tous les entiers relatifs par leurs restes dans la division euclidienne par b.
Exemple : Tout entier relatif n $\in \{5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ de même tout entier relatif n $\in \{3k, 3k+1, 3k+2\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$
Ainsi l'ensemble $\mathbb{Z}$ peut être découpé de façons différentes, par exemple :
$\mathbb{Z} = \{5k\ ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5k+1\ ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5k+2\ ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5k+3\ ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5k+4\ ; k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{Z} = \{3k\ ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3k+1\ ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3k+2\ ; k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 8 :
soit m et n deux entiers relatifs. Les restes de la division euclidienne de m et n par 11 sont respectivement 2 et 7.
1) Déterminer le reste de la division de chacun des entiers m+n et m−n par 11.
2) En déduire le reste de la division euclidienne de l'entier $m^2 - n^2$ par 11.

III/ *Congruences :*

Définition :
Soit a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul. On dit que « a est congru à b modulo n » ou que « a et b sont congrus modulo n » si : a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
On note $a \equiv b[n]$ ou $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$

Exemple :
* $5 \equiv 14[3]$. En effet : $5 = 1 \times 3 + 2$ et $14 = 4 \times 3 + 2$
* $-36 \equiv 9\ [5]$. En effet : $-36 = -8 \times 5 + 4$ et $9 = 1 \times 5 + 4$

Propriétés :
a, b et c désignent des entiers relatifs et n un entier naturel non nul. Alors
* $a \equiv a[n]$ (la congruence est réflexive)
* Si $a \equiv b[n]$ alors $b \equiv a[n]$ (la congruence est symétrique)
* Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$ (la congruence est transitive)

Congruence et divisibilité :

Théorème
Soit n entier naturel non nul. a et b désignent deux entiers relatifs.
Alors on a :
$a \equiv b[n] \Leftrightarrow$ a−b est un multiple de n
* Ainsi $a \equiv b[n] \Leftrightarrow a = n.q + b$ où $q \in \mathbb{Z}$

Exemple : $-147 \equiv 13[4]$ car $13+147 = 160$ est un multiple de 4

Conséquences :

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers relatifs. Alors :
* $a \equiv 0[n] \Leftrightarrow$ a est un multiple de n
* $a \equiv b[n] \Leftrightarrow a - b \equiv 0[n]$
* $n \equiv 0[n]$ et $0 \equiv 0[n]$
* Si $a \equiv b[n]$ et si d un entier naturel non nul qui divise n alors $a \equiv b[d]$

Congruence et reste :

Soit a un entier relatif et n un entier naturel non nul.
Si r est le reste dans la division euclidienne de a par n alors $a \equiv r[n]$

Attention : La réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple : $15 \equiv 7[4]$ mais 7 n'est pas le reste dans la division de 15 par 4

Réciproquement : Soit a un entier relatif et n un entier naturel non nul.
Si $a \equiv r[n]$ et $0 \leq r < n$ alors r est le reste dans la division euclidienne de a par n

Exercice 9 :

Déterminer tous les entiers a tels que : $a \equiv 127[5]$ et $|a| \leq 37$

Congruence et opérations:

Soit n un entier naturel non nul, a, b, a' et b' quatre entiers relatifs.
Si $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors :
* $a + a' \equiv b + b'[n]$
* $a \times a' \equiv b \times b'[n]$

On dit que la congruence est compatible avec l'addition et la multiplication

Conséquences : Soit n un entier naturel non nul, a, b, a' et b' sont des entiers relatifs. Si $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors :
* $a + c \equiv b + c\ [n] \quad \forall c \in \mathbb{Z}$
* $a \times c \equiv b \times c\ [n] \quad \forall c \in \mathbb{Z}$
* $a^k \equiv b^k[n] \quad \forall k \in IN$
* $a - a' \equiv b - b'\ [n]$

Attention ▲ :
La congruence n'est pas compatible avec la division.

Si $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on n'a pas nécessairement $\frac{a}{a'} \equiv \frac{b}{b'}[n]$

Remarques :

1) Si $k.a \equiv k.b[n]$ pour $k \in \mathbb{Z}$ alors on n'a pas nécessairement $a \equiv b[n]$. Exemple : $9 \times 7 \equiv 9 \times 5[3]$ mais $7 \not\equiv 5[3]$

2) Si a, b et n sont divisibles par un même entier c alors $a \equiv b[n]$ implique $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c}\,[\frac{n}{c}]$

3) Si $a \equiv b[n]$ alors $\forall\, c \in \mathbb{Z}$ on a : $a.c \equiv b.c[nc]$

Exercice 10 :

Soit deux entiers a et b tels que $a \equiv 3[15]$ et $b \equiv 11[15]$.
Déterminer les restes modulo 15 de : a.b+b ; $a^3 - b^2$; -a+2 ; $-3ab^2$

Exercice 11 :

1) Vérifier que $41 \equiv 1[5]$
2) En déduire le reste dans la division euclidienne de l'entier 41^{2016} par 5.

Exercice 12 :

1) Vérifier que $9 \equiv -1[10]$
2) En déduire le chiffre des unités de chacun des entiers 9^{15013} et 9^{15022}

Exercice 13 :

1) Vérifier que $566 \equiv 6[7]$
2) En déduire le reste dans la division euclidienne par 7 de chacun des entiers 566^{2k} et 566^{2k+1} $\forall k \in$ IN.

Exercice 14 :

1) Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste dans la division euclidienne de 2^n par 7.
2) En déduire le reste dans la division euclidienne de 247^{349} par 7.

Exercice 15 :

On se propose de montrer à l'aide des congruences que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $x = n^3 - n$ est un multiple de 3.

∗ Si $n \equiv 0[3]$ alors $n^3 \equiv 0[3]$ donc $n^3 - n \equiv 0[3]$
∗ Si $n \equiv 1[3]$ alors $n^3 \equiv 1[3]$ donc $n^3 - n \equiv 0[3]$
∗ Si $n \equiv 2[3]$ alors $n^3 \equiv 8[3] \equiv 2[3]$ donc $n^3 - n \equiv 0[3]$

Reste modulo 3 de n	0	1	2
Reste modulo 3 de n^3	0	1	2
Reste modulo 3 de x	0	0	0

L'étude de ces cas peut être présenté sous forme d'un tableau appelé tableau congruence

Exercice 16 :

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes modulo 5 de 3^n.
2) On considère le nombre entier : $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ où n ∈ IN.
   A l'aide d'un tableau de congruence, résoudre dans IN l'équation : $A_n \equiv 4[5]$

IV/ *PGCD et PPCM de deux entiers :*

1) PGCD de deux entiers :

Activité1 :

1) Factoriser en produit de facteurs premiers chacun des entiers a=144 et b=270
2) Déterminer les ensembles D_a et D_b, puis $D_a \cap D_b$.
3) En déduire le PGCD(a,b)

⇨ PGCD(a,b)=2×3^2

Activité2 :

1) Déterminer les diviseurs de 12 puis de (-18)
2) En déduire le plus grand diviseur commun de 12 et (-18).

⇨ Ce nombre est noté PGCD(12,-18) ou $12 \wedge (-18)$

3) Comparer PGCD(12,18) et PGCD(12,-18).

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. Le plus grand entier qui divise à la fois a et b s'appelle le plus grand commun diviseur de a et b et se note PGCD(a,b) ou $a \wedge b$.

Propriétés :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
* Si un entier k divise a et b alors il divise PGCD(a,b).
* PGCD(a,b) est un entier naturel non nul.
* PGCD(a,b)=PGCD($|a|$, $|b|$)
* Si b divise a alors PGCD(a,b)= $|b|$ ⇨ En particulier : PGCD(1,b)=1
* Si b ne divise pas a et si r est le reste dans la division euclidienne de a par b, alors PGCD(a,b)= PGCD(b,r)
* Pour tout entier relatif α non nul, $\text{PGCD}(\alpha a, \alpha b) = |\alpha|.\text{PGCD}(a,b)$
* PGCD(a,b)=PGCD(b,a)

Exercice17 :

1) A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer PGCD(-1970,1815).
2) En déduire PGCD(3940,-3630)

Remarques :

1) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. PGCD(a,b) est le dernier reste non nul de la suite des divisions euclidiennes dans l'algorithme d'Euclide.
2) On peut utiliser une calculatrice, pour trouver par exemple PGCD(2003,365) :

En tapant : « 2003 ab/c 365 = » la calculatrice affiche 5 r 178 r 365

Cela signifie que : 2003=365×5+178, et on refait alors le même procédé…

2) **Entiers premiers entre eux** :

Définition :

Deux entiers relatifs non nuls a et b sont dits premiers entre eux, si PGCD(a,b)=1

Exercice18 :

Soit n un entier et d un entier naturel non nul.
1) Montrer que si d =PGCD[(n+1),(n+9)], alors d divise 8.
2) En déduire que si n est pair alors (n+1) et (n+9) sont premiers entre eux.

Activité 1:

1) Montrer que si d=PGCD(a,b) alors il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que a=d.a' et b=d.b'.
2) La réciproque est-elle vraie ?

Théorème : (Propriété caractéristique du PGCD)

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et d un entier naturel non nul.
d= PGCD(a, b) si et seulement si il existe deux entiers relatifs a' et b' tels que a=d.a' et b=d.b' et PGCD(a',b')=1

Exercice19 :

Résoudre dans IN×IN le système $\begin{cases} xy = 16128 \\ PGCD(x,y) = 24 \end{cases}$

Activité 2:

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls tels que PGCD(a,b)=1. Soit c un entier non nul.
1) Justifier que PGCD(ac,bc)= |c|
2) En déduire que si a divise bc alors a divise c

Théorème : (Lemme de Gauss)

Soit a, b et c trois entiers non nuls. Si a divise b.c et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Remarques :

1) La condition $a \wedge b=1$ est nécessaire dans le lemme de Gauss, en effet : $6|4\times3$ mais 6 ne divise ni 4 ni 3.
2) La réciproque du lemme de Gauss n'est pas toujours vraie. En effet : $3|6$ alors $3|6\times9$ mais $3 \wedge 9=3\neq1$

Exercice 20 :

1) a) Montrer que si $7x \equiv 0[5]$ alors $x = 5k$.
   b) En déduire les solutions de l'équation $7x \equiv 0[5]$.
2) On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $20(x+1) = 17y$
   a) Vérifier que si (x,y) est une solution de l'équation (E) alors : 20 divise y
   b) En déduire les solutions de l'équation (E).
3) a) Montrer que si $4x \equiv 4y[3]$ alors $x \equiv y[3]$
   b) En déduire les solutions (x,y) de l'équation $4x \equiv 4y[3]$.

3) PPCM de deux entiers :

Pour tous entiers relatifs non nuls a et b, l'entier $|a.b|$ est un multiple commun strictement positif de a et b. Ceci implique que l'ensemble des multiples communs strictement positifs de deux entiers a et b est non vide.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. Le plus petit entier strictement positif qui est à la fois multiple de a et b s'appelle le plus petit commun multiple de a et b et se note PPCM(a,b) ou $a \vee b$.

Propriétés :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.
⁎ Si un entier k est un multiple commun de a et b alors il est un multiple de $a \vee b$.
⁎ $a \vee b = |a| \vee |b|$
⁎ Si b divise a alors $a \vee b = |a|$
⁎ L'ensemble des multiples communs de a et b est celui des multiples de $a \vee b$.
⁎ $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |a.b|$
⁎ Pour tout entier non nul k, $ka \vee kb = |k|(a \vee b)$

Exercice 21 :

Soit $a = 5^{n+2} - 5^n$ et $b = 7^{n+2} - 7^n$ où n est un entier naturel.
1) Montrer que $a = 24 \times 5^n$ et $b = 48 \times 7^n$.
2) En déduire le PPCM(a,b).

Exercice 22 :

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le système suivant :

$$\begin{cases} xy = -1512 \\ x \vee y = 252 \end{cases}$$

V/ *Identité de Bezout :*

Activité 1:

1) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le PGCD(391,323)

2) Déterminer deux entiers u et v tels que $391.u+323.v=17$(On pourra partir de la dernière division de l'algorithme d'Euclide où le reste est non nul et écrire le PGCD trouvé comme combinaison linéaire de 391 et 323).

Théorème:

> a et b désignent deux entiers relatifs non nuls et d leur PGCD. Alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $a.u+b.v=d$

Remarque :

La réciproque du théorème précédent n'est pas toujours vraie. En effet : $-2\times3+1\times18=12$ mais $3\wedge18=3\neq12$

Conséquence:

> Si un entier relatif k divise à la fois a et b, alors il divise leur PGCD. Ainsi l'ensemble des diviseurs communs de a et b est celui des diviseurs du PGCD(a,b)

Activité 2:

On se propose de montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a.u+b.v=1$

Un sens a été déjà énoncé dans le théorème précédent. Donc montrons le sens réciproque :

Soit (u,v) d'entiers relatifs tels que $a.u+b.v=1$. Montrons que $a\wedge b=1$

⇨ Supposons que $a\wedge b=d$. Alors d divise à la fois a et b ce qui implique que d divise $(a.u+b.v)$, d'où d divise 1. Et par la suite d=1.

Théorème: (Identité de Bézout)

> Si un entier relatif k divise à la fois a et b, alors il divise leur PGCD. Ainsi l'ensemble des diviseurs communs de a et b est celui des diviseurs du PGCD(a,b)

Exercice 23 :

1) Vérifier que 53 et 107 sont premiers entre eux.

2) a) Montrer que pour tout entier relatif n, les entiers $a=2n+3$ et $b=5n+7$ sont premiers entre eux.

   b) En déduire le PGCD$(2n^2+3n, 5n^2+7n)$

VI/ *Résolution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ d'équations du type ax+by=c où a, b et c sont des entiers relatifs :*

Exemple1 : (guidé)

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $42x + 35y = 14$

1) Déterminer PGCD(42,35). En déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.
2) a) Vérifier que l'équation (E) est équivalente à l'équation $6x + 5y = 2$
   b) Déterminer une solution particulière de l'équation $6x + 5y = 1$
   c) En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation $6x + 5y = 2$
3) a) En écrivant $2 = 6.x_0 + 5.y_0$, vérifier que si (x,y) est une solution de l'équation (E) alors $6(x-x_0)=-5(y-y_0)$
   b) En utilisant le lemme de Gauss, montrer que si (x,y) est une solution de (E) alors $x = x_0 - 5k$ et $y = y_0 + 6k$ où $k \in \mathbb{Z}$.
   c) En déduire alors l'ensemble de solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation (E).

Théorème :

Soit a, b et c trois entiers et $d = a \wedge b$. L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si et seulement si d divise c

Exemple2:

Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $120x + 26y = 2$

Réponse:

⁎ D'abord on remarque que (E) est équivalente à $60x+13y = 1$

⁎ 60 et 13 sont premiers entre eux alors l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

⁎ Cherchons une solution particulière de l'équation (E) :

Il n'est pas évident de la trouver immédiatement, alors on peut se servir de l'algorithme d'Euclide qui donne le PGCD de 60 et 13.

$$\begin{cases} 60 = 4\times 13 + \boxed{8} \\ 13 = 1\times 8 + \boxed{5} \\ 8 = 1\times 5 + \boxed{3} \\ 5 = 1\times 3 + \boxed{2} \\ 3 = 1\times 2 + \boxed{1} \\ 2 = 2\times 1 + 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 = 3 - 1\times 2 \\ \quad = 3 - 1\times(5 - 3\times 1) = 3\times 2 - 5 \\ \quad = (8 - 5\times 1)\times 2 - 5 = 8\times 2 - 5\times 3 \\ \quad = 8\times 2 - (13 - 8\times 1)\times 3 = 8\times 5 - 3\times 13 \\ \quad = (60 - 4\times 13)\times 5 - 3\times 13 = 60\times 5 - 13\times 23 \end{cases}$$

D'où $60\times 5 - 13\times 23 = 1$ et par la suite (5,-23) est une solution particulière de (E).

⁎ En écrivant $60x + 13y = 60\times 5 - 13\times 23$, on obtient $60(x-5)= -13(y+23)$

et en se servant du lemme de Gauss, on obtient $x = 5 - 13k$ et $y = 60k - 23$ où $k \in \mathbb{Z}$

⁎ Réciproquement : si $(x,y)=(5 - 13k, 60k - 23)$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$60(5 - 13k)+13(60k - 23)=300-299 = 1$

⁎ Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(5 - 13k, 60k - 23)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercices

EXERCICE 1 :

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste modulo 13 de l'entier 5^p.
2) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre
   $N=31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13

EXERCICE 2 :

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n les restes modulo 5 de 3^n et 7^n.
2) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $16\times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3} \equiv 0(\text{mod}5)$.

EXERCICE 3 :

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.
2) On pose $A_n=3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$; $n\in IN$. Déterminer suivant les valeurs de n les restes de A_n modulo 5.
3) Résoudre dans IN l'équation $A_n \equiv 3(\text{mod } 5)$
4) Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier $N=1253^{2014} \times 13^{2015}$

EXERCICE 4 :

1) Vérifier que $3^2 \equiv -1(\text{mod}10)$. En déduire le chiffre des unités de l'entier naturel 3^{400}
2) Déterminer le chiffre des unités et celui des dizaines de l'entier naturel 3^{405}.

EXERCICE 5 :

1) Déterminer tous les entiers a et b tels que $a+b\equiv 2(\text{mod } 4)$
2) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tels que : $2^n \equiv 1(\text{mod } 5)$
3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n telles que : $2^n + 2^{2n} - 2$ soit divisible par 5.
   (On pourra se servir d'un tableau de congruence)

EXERCICE 6 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes :

a) $7x\equiv 8(\text{mod}10)$ b) $x^2 \equiv -2(\text{mod}11)$ c) $x^2 - x + 4 \equiv 0(\text{mod } 6)$

EXERCICE 7 :

Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $8x + 3y = 75$.

1) a) Vérifier que (-1 , 3) est une solution de l'équation 8x+3y=1
   b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c) Montrer que les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation (E) sont les couples (x,y) tels que : $x=3q-75$ et $y=225-8q$; (avec $q\in Z$).

2) Une visite pour un musée a été organisé pour un groupe d'élèves. Les frais d'entrée pour ce groupe sont élevés à 75 dinars. Le prix d'un billet d'accès au musée est de 8 dinars pour un lycéen et de 3 dinars pour un collégien.
Quelles sont les compositions possibles de ce groupe en lycéens et collégiens ?

EXERCICE 8 :

Pour tout entier n, on considère les nombres $a=2n-3$ et $b=3n-1$

1) Quelles sont les valeurs possibles de $a\wedge b$?

2) a) Vérifier que pour tout n, le couple (a,b) est solution de l'équation (E) : $3x-2y=-7$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $a\wedge b=7$

EXERCICE 9 :

1) Déterminer deux entiers u et v tels que $9u-11v=1$

2) Soit a, b et x trois entiers. Montrer que :
Si $x\equiv a(\mathrm{mod}\ 9)$ et $x\equiv b(\mathrm{mod}\ 11)$ alors $x\equiv 45b-44a(\mathrm{mod}\ 99)$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x\equiv 6(\mathrm{mod}\ 9)\\ x\equiv 8(\mathrm{mod}\ 11)\end{cases}$

EXERCICE 10 :

1) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $3x-8y=5$.
Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x,y) tels que $x=8k-1$ et $y=3k-1$

2) a) Soit n, x et y trois entiers tels que $\begin{cases} n=3x+2\\ n=8y+7\end{cases}$

Montrer que (x,y) est une solution de (E).

b) On considère le système (S) : $\begin{cases} n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)\\ n\equiv 7(\mathrm{mod}\ 8)\end{cases}$ où n est un entier.

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n\equiv 23(\mathrm{mod}\ 24)$

3) a) Soit k un entier naturel. Déterminer le reste de 2^k modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $1991^{2008}-1$ est divisible par 24.