

Résumé : *Identité de Bézout*
Niveau : *Bac mathématiques*
Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber* - saberbjd2003@yahoo.fr

Théorème et définition : "PGCD"

Si a et b sont deux entiers non nuls, alors il existe un unique entier naturel d qui vérifie les deux conditions suivantes :

- d divise a et d divise b ,
- Si un entier k divise a et b alors il divise d .

L'entier d défini plus haut est noté $a \wedge b$ et appelé **le plus grand commun diviseur** de a et b .

Conséquences :

- Pour tous entiers a et b non nuls, $a \wedge b > 0$.
- Pour tous entiers a et b non nuls, $a \wedge b = |a| \wedge |b|$.

Propriétés :

Soit a et b deux entiers non nuls.

- 1) Si b divise a alors $a \wedge b = |b|$.
- 2) Si b ne divise pas a et si r est le reste modulo b de a , alors $a \wedge b = b \wedge r$.
- 3) $a \wedge b = b \wedge a$.
- 4) Pour tout entier non nul k , $ka \wedge kb = |k|(a \wedge b)$.
- 5) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

Définition : "Entiers premiers entre eux"

Deux entiers non nuls a et b sont dits premiers entre eux, si $a \wedge b = 1$.

Théorème :

Lemme de Gauss :

Soit a , b et c trois entiers non nuls. Si $a \wedge b = 1$ et a divise bc alors a divise c .

Théorème :

Théorème et définition : "PPCM"

Conséquences :

- Pour tous entiers a et b non nuls, $a \vee b = |a| \vee |b|$.
- Pour tous entiers a et b non nuls, $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$.

Propriétés :

Soit a et b deux entiers non nuls.

- 1) Si b divise a alors $a \vee b = |b|$.
- 2) Pour tout entier non nul k , $ka \vee kb = |k|(a \vee b)$.
- 3) $a \vee b = b \vee a$.
- 4) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

Théorème :

Théorème : "Identité de Bézout"

Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Corollaire :

Soit a et b deux entiers non nuls et $d = a \wedge b$. Alors il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$.

Théorème :

Soit a , b et c trois entiers et $d = a \wedge b$.
L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si et seulement si, d divise c .