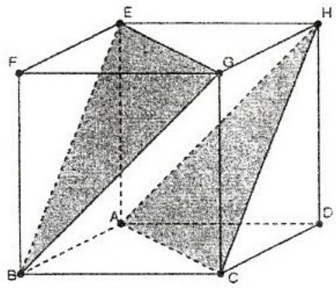
Prof : Oueslati Aymen

serie de revision :espace,arithmetique,etude de fonction

Exercice1 BAC 2014



L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit ABCDEFGH le cube tel que

$\overrightarrow{AB}=6\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=6\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=6\vec{k}$.

On désigne par P le plan (ACH) et par Q le plan (EGB).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}$.

b) En déduire une équation du plan P.

c) Montrer que les plans P et Q sont parallèles et donner une équation du plan Q.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=0$

a) Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I.

b) Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q. Montrer que [AJ] est un diamètre de S.

c) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{U}=2\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$.

a) Soit A' et J' les images respectives de A et J par t. Déterminer les coordonnées de A' et J'.

b) Déterminer S' l'image de la sphère S par t.

c) Montrer que S' est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,,\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y=\dfrac{e^2}{8}(x-2)$.

3) On se propose d'étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente Δ .

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{e^x}{x^3}$. On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0		2		3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{e^2}{8}$	↘	$\frac{e^3}{27}$	↗	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $g(x)=\dfrac{e^2}{8}$ admet dans $]3\ ,\ +\infty[$ une solution unique α telle que $4{,}2<\alpha<4{,}3$.

b) Déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

4) Justifier l'existence sur $]0,+\infty[$ d'une primitive F de f telle que $F(1) = e$.

5) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_F$ de la fonction F, la droite Δ et le rectangle ABCD tel que $A(1, e)$; $B(0, e)$; $C(0, F(2))$ et $D(1, F(2))$.

a) Etudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans l'annexe ci-jointe.

6) Soit $t\in[1\ ,\ 2[$. On désigne par S(t) la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = t$ et $x = 2$. On désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de S(t) .

a) Exprimer $\mathscr{A}(t)$ en fonction de F(t).

b) Hachurer S(1) et justifier qu'elle a la même aire que le rectangle ABCD.

c) Montrer qu'il existe un unique $t_0\in[1\ ,\ 2[$ tel que $\mathscr{A}(t_0)=\dfrac{1}{2}\mathscr{A}(1)$.

d) Construire le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse t_0.

exercice3 BAC 2014

1) Soit a un entier tel que $a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,10)$.

a) Montrer que $a^9+a^8+..+a+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,10)$.

b) En déduire que $a^{10}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,10^2)$.

(On pourra utiliser l'égalité $a^{10}-1=(a-1)(a^9+a^8+..+a+1)$).

2) Soit b un entier.

a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

b) En déduire que $b^4\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,10)$ si et seulement si b est premier avec 10.

3) Soit b un entier premier avec 10.

a) Montrer que $b^{40}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,10^2)$.

b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

proposer par / Oueslati Aymen

27677722