Résumé : *Coniques*

Niveau : *Bac mathématiques*

Réalisé par : *Prof. Benjeddou Saber*

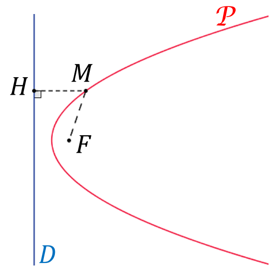
saberbjd2003@yahoo.fr

Définition : *"Parabole"*

Soit D une droite et F un point n'appartenant pas à D.

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite D.

On appelle **parabole** $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice D, l'ensemble des points M tels que $MF = MH$.



Vocabulaire :

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice D.

La perpendiculaire à D passant par F est appelée **axe focal** de $\mathcal{P}$.

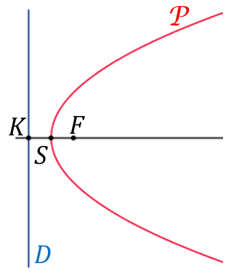
La distance du foyer à la directrice est appelée **paramètre** de $\mathcal{P}$.

Théorème :

Toute parabole admet comme axe de symétrie son axe focal.

Toute parabole rencontre son axe focal en un unique point appelé **sommet** de la parabole.

Le sommet d'une parabole de foyer F et de directrice D est le milieu du segment $[FK]$ où K est le projeté orthogonal de F sur D.



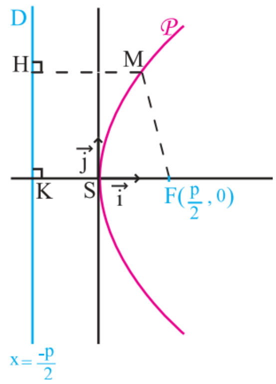
Théorème :

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de sommet S, de foyer F et de paramètre p.

On munit le plan du repère orthonormé $(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, où $\vec{\imath} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$.

La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y^2 = 2px$, la directrice D a pour équation $x = -\frac{p}{2}$ et le foyer a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2};0\right)$.

Réciproquement, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ est la parabole de foyer $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, de directrice la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O.



Vocabulaire :

L'équation $y^2 = 2px$ est appelée équation réduite de la parabole $\mathcal{P}$.

Théorème :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit p un réel strictement positif.

Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y^2 = 2px$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0(x_0;y_0)$ est la droite d'équation $y_0y = p(x+x_0)$.

Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $x^2 = 2py$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0(x_0;y_0)$ est la droite d'équation $x_0x = p(y+y_0)$.

Conséquence :

Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation $y^2 = 2px$, dans le repère $(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, où S est le sommet de la parabole et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont des vecteurs directeurs unitaires respectifs de l'axe focal et de la directrice. Alors sa tangente au sommet a pour équation $x = 0$.

Vocabulaire :

La tangente à une parabole en son sommet est appelée **tangente au sommet**.

Définition : *"Hyperbole"*

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et un réel $e > 1$.

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite D.

On appelle **hyperbole** $\mathcal{H}$ de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$.

Vocabulaire :

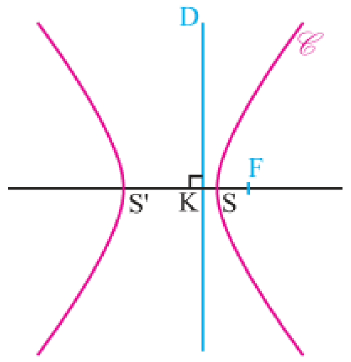
Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F et de directrice D.

La perpendiculaire à D passant par F est appelée **axe focal** de l'hyperbole.

Théorème :

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

- L'axe focal de $\mathcal{H}$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{H}$.
- $\mathcal{H}$ rencontre son axe focal en deux points appelés sommets de l'hyperbole et ils sont les barycentres respectifs des points $(F,1)$, (K,e) et $(F,1)$, $(K,-e)$ où K est le projeté orthogonal de F sur D.

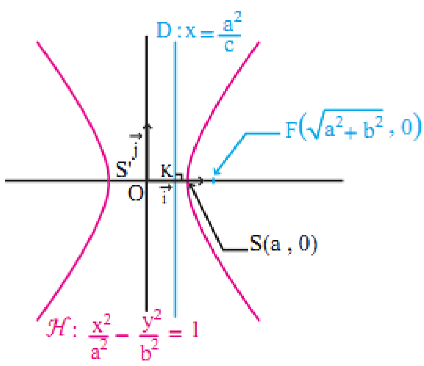


Théorème :

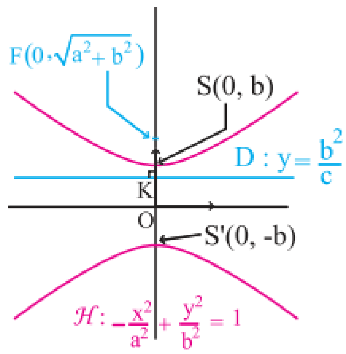
Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice D, d'excentricité e et de sommets S et S'.
On désigne par O le milieu de $[SS']$, On pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$, directeur de D.

Si S a pour coordonnées $(a; 0)$ et F a pour coordonnées $(c; 0)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors l'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b^2 = c^2 - a^2$.

Réciproquement, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ est une hyperbole de centre O, de foyer $F\left(\sqrt{a^2+b^2}; 0\right)$, de directrice d'équation $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ avec $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et de sommets $S(a; 0)$ et $S'(-a; 0)$.



Pour des raisons de symétrie par rapport à la droite $\Delta: y = x$, la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole de centre O, de foyer $F\left(0; \sqrt{a^2+b^2}\right)$, de directrice la droite d'équation $y = \frac{b^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{b}$ avec $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et de sommets $S(0; b)$ et $S'(0; -b)$.



Vocabulaire :

L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ est appelée **équation réduite** de l'hyperbole.

Cette équation ne change pas si l'on change x en $-x$ ou y en $-y$.

Théorème :

- Toute hyperbole admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets.
  Ce centre de symétrie est appelé centre de l'hyperbole.
- Toute hyperbole admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice et passant par le centre de symétrie.

Conséquence :

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F et de directrice D.

Le fait que l'hyperbole $\mathcal{H}$ admette un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F.

On dit alors que F est le foyer associé à la directrice D et F' est le foyer associé à la directrice D'.

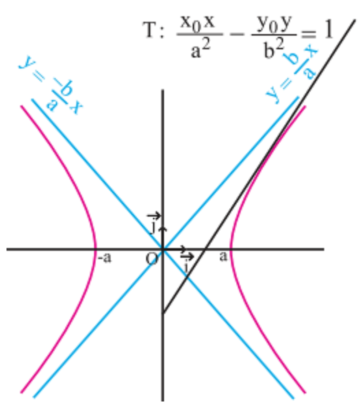
Théorème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Alors $\mathcal{H}$ admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$.

La tangente à $\mathcal{H}$ en un point $M_0(x_0;y_0)$ a pour équation $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.



Vocabulaire :

On dit qu'une hyperbole est équilatère si ses asymptotes sont perpendiculaires.

Conséquence :

La tangente à une hyperbole $\mathcal{H}$ en son sommet $S(a;0)$ a pour équation $x=a$.

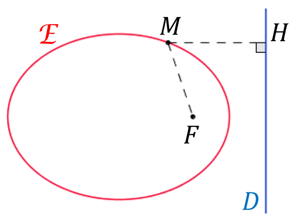
Théorème :

Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme $XY=k$ où k est un réel non nul.

Définition : *"Ellipse"*

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et e un réel tel que $0<e<1$.

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite D.



On appelle **ellipse** $\mathcal{E}$ de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH}=e$.

Vocabulaire :

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F et de directrice D.

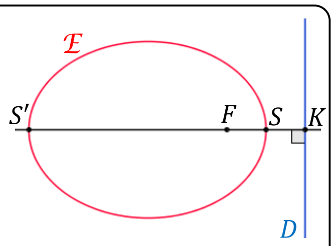
La perpendiculaire à D passant par F est appelée **axe focal** de cette ellipse.

Théorème :

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

L'axe focal de $\mathcal{E}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{E}$.

E rencontre son axe focal en deux points S et S' appelés sommets principaux de l'ellipse et ils sont les barycentres respectifs des points $(F,1)$, (K,e) et $(F,1)$, $(K,-e)$ où K est le projeté orthogonal de F sur D.

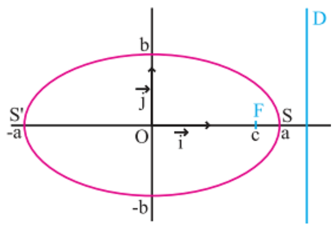


Théorème :

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

On désigne par O le milieu des sommets principaux S et S'.

On pose $\vec{\imath} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{\jmath}$ un vecteur unitaire de sorte que le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit orthonormé.



Si S a pour coordonnées $(a; 0)$ et F a pour coordonnées $(c; 0)$ alors l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b^2 = a^2 - c^2$.

Cette équation est appelée équation réduite de $\mathcal{E}$.

Théorème :

Toute ellipse admet un centre de symétrie, qui est le milieu du segment formé par ses sommets principaux.

Ce centre de symétrie est appelé centre de l'ellipse.

Toute ellipse admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et la droite perpendiculaire à l'axe focal en son centre.

Conséquence :

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F et de directrice D.

Le fait que l'ellipse $\mathcal{E}$ admette un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F par rapport au centre de l'ellipse.

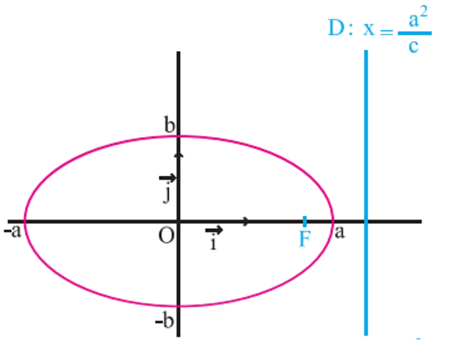
On dit que F est le foyer associé à la directrice D et que F' est le foyer associé à la directrice D'.

Théorème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

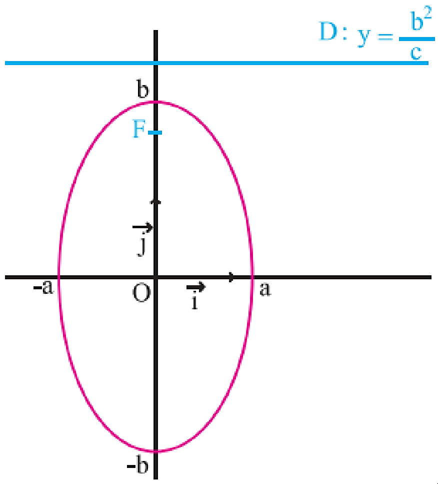
- Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a > b$.

L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est une ellipse de centre O, de foyer $F\left(\sqrt{a^2-b^2};0\right)$, de directrice associée la droite d'équation $x=\frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e=\frac{c}{a}$, où $a^2=c^2+b^2$.



- Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est une ellipse de centre O, de foyer $F\left(0;\sqrt{b^2-a^2}\right)$, de directrice associée la droite d'équation $y=\frac{b^2}{c}$ et d'excentricité $e=\frac{c}{b}$, où $b^2=a^2+c^2$.

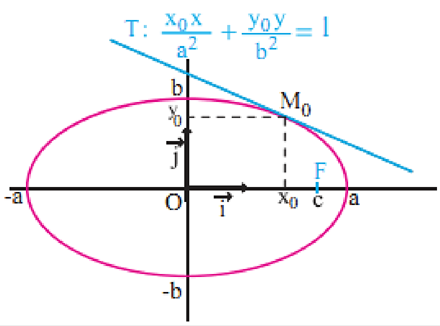


Théorème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0$.

Alors la tangente à $\mathcal{E}$ en un point $M_0(x_0;y_0)$ a pour équation $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.



Conséquence :

- La tangente à une ellipse $\mathcal{E}$ en son sommet $S(a;0)$ a pour équation $x=a$.
- La tangente à une ellipse $\mathcal{E}$ en son sommet $L(0;b)$ a pour équation $y=b$.

Théorème :

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et un réel $e > 0$.

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur D.

On appelle **conique** C d'excentricité e, de foyer F et de directrice D l'ensemble des points M tels que $MF = eMH$.

- Si $e = 1$, C est une parabole de foyer F et de directrice D.
- Si $e > 1$, C est une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.
- Si $e < 1$, C est une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

Théorème :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'ensemble des points $M(x: y)$ du plan tels que $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, où A, B, C, D et E sont des réels est une courbe dont la nature est donnée par le tableau suivant :

AB	Courbe
$AB = 0$	Parabole ou deux droites parallèles ou une droite ou le vide
$AB < 0$	Hyperbole ou deux droites sécantes
$AB > 0$	Ellipse ou cercle ou un point ou le vide