Devoir de contrôle n°①

$4^{ème}$ MATHS

Prof : NOBBIGH Dhaou

Mardi 10 novembre 2015

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 (7 points)

Le plan complexe P est muni d' un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Partie A :

1) On donne les points A , B et D d'affixes respectives -1 , i et z_D avec $Re(z_D)\neq 0$.
   On considère l'application f de $P\setminus\{B\}$ dans P qui, à tout point M de $P\setminus\{B\}$ d'affixe z ,
   associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{z-i}{\overline{z}+i}$.
   a) Déterminer l'ensemble $\Gamma=\{M(z) \text{ telque } z'=-1\}$.
   b) Justifier que $|z'|=1$.
   c) Montrer que $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.
   d) Construire alors le point $D'=f(D)$. (Page annexe)
2) On prend $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
   a) Mettre $e^{i\theta}-i$ puis $e^{-i\theta}+i$ sous la forme exponentielle.
   b) En déduire que $z'=e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$.
   c) En déduire la valeur de θ pour que $\left(e^{i\theta}-i\right)^3=\left(e^{-i\theta}+i\right)^3$.

Partie B :

Soit l'équation $(E): z^2-2\cos\theta\, z+2(1-\sin\theta)=0$ avec $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
2) On note M_1, M_2 et N les points d'affixes respectives $z_1=e^{i\theta}-i$, $z_2=e^{-i\theta}+i$ et $z_3=2\cos\theta$.
   a) Montrer que $(M_1M_2)\perp(ON)$ et que le quadrilatère OM_1NM_2 est un losange.
   b) Déterminer et construire l'ensemble Ψ des points M_1 lorsque θ varie.

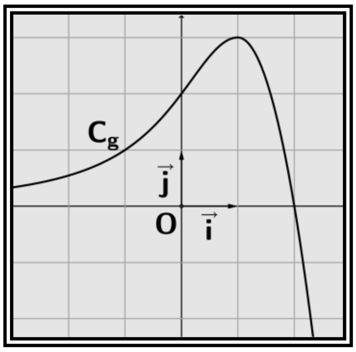
EXERCICE 2 (5 points)

1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x<0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$
   a) Justifier la continuité da f sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   c) Vérifier que pour tout $x\in]-\infty,0[$, on a : $-x^2\leq f(x)\leq x^2$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.
   d) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2) La courbe C_g ci-contre est celle d'une fonction g continue sur IR .

On donne : la droite $(O,\vec{i})$ est une asymptote horizontale à C_g au voisinage de $(-\infty)$.

Par lecture graphique , Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $g(]-\infty,2[)$.



3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ g(x)$.

4) Montrer que $f\circ g$ est continue sur $]-\infty,2[$.

5) Montrer que $(f\circ g)(x)=\frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $[-1,1]$.

EXERCICE 3 (8 points)

I. Soit f la fonction définie sur $[\sqrt{3},+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2+3}{2x}$.

1) Montrer que pour tout $x\in[\sqrt{3},+\infty[$ on a : $f(x)\leq x$.

2) a) Etudier le sens de variation de f sur $[\sqrt{3},+\infty[$.

b) En déduire que pour tout $x\in[\sqrt{3},+\infty[$, on a : $f(x)\geq\sqrt{3}$.

II. Soient U et V les suites définies sur IN par $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$ et $V_n=\frac{3}{U_n}$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n\geq\sqrt{3}$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

2) Montrer que la suite V est croissante.

3) a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n+V_n=2f(U_n)$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}-V_{n+1}=\frac{(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)}$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0\leq U_{n+1}-V_{n+1}\leq\frac{1}{4}(U_n-V_n)^2$.

d) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0\leq U_n-V_n\leq\frac{1}{4^{2^n-1}}$.

4) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $2^n-1\geq n$.

b) Montrer alors que les suites U et V sont adjacentes.

c) Sans utiliser la calculatrice justifier que $\frac{168}{97}\leq\sqrt{3}\leq\frac{97}{56}$.

Nom et Prénom : .... **4ème MATHS N°** ....