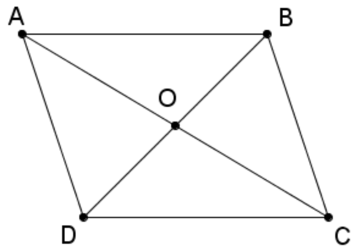
Exercices sur les vecteurs

Exercice 1

$ABCD$ est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en O.



(1) Compléter par un vecteur égal :

a) $\overrightarrow{AB} = ...$

b) $\overrightarrow{BC} = ...$

c) $\overrightarrow{DO} = ...$

d) $\overrightarrow{OA} = ...$

e) $\overrightarrow{CD} = ...$

(2) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier :

a) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

b) $[AB] = [DC]$

c) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$

d) $\overline{OA} = \overline{OC}$

e) $AB = DC$

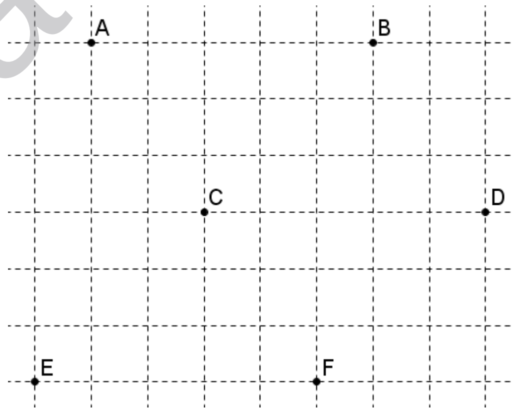
f) $O = \text{mil}\,\overrightarrow{AC}$

g) $\text{mil}\,\overrightarrow{BD} = \text{mil}\,\overrightarrow{AC}$

h) $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$

Exercice 2

En utilisant le quadrillage, dire pour chaque égalité si elle est vraie ou fausse :



(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

(2) $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$

(4) $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$

(5) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$

(6) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{DC}$

Exercice 3

Soit ABC un triangle quelconque.

(1) Construire :

- le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC}$;
- le point P tel que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BC}$;
- le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$.

(2) Montrer que $A = \text{mil}[NP]$, $B = \text{mil}[PM]$ et $C = \text{mil}[MN]$.

(3) Quel est le rapport des aires des triangles ABC et MNP ? Justifier !

Exercice 4

Sur la figure ci-contre, formée de parallélogrammes juxtaposés, déterminer :

(1) un représentant de $\overrightarrow{DB}$

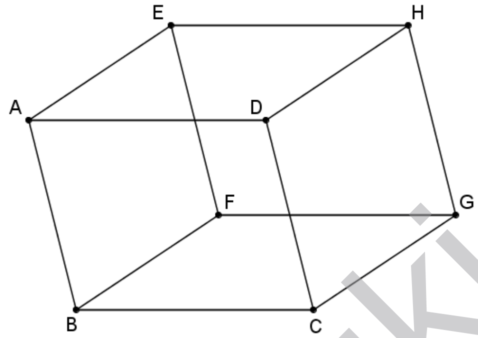
(2) trois représentants de $\overrightarrow{AE}$

(3) un représentant de $\overrightarrow{FG}$ d'origine B

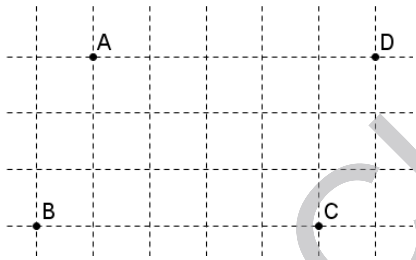
(4) un représentant de $\overrightarrow{CF}$ d'extrémité E

(5) un représentant de $\vec{0}$

(6) un représentant de $-\overrightarrow{AF}$



Exercice 5



(1) Reproduire le parallélogramme $ABCD$ ci-dessus dans votre cahier puis construire les points E, F, G, H et I définis par :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC}\ ;$$
$$\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AC}\,.$$

(2) Quelle est la nature des quadrilatères $BCEF$ et $DGEC$.

(3) Que représente le point A pour le segment $[IC]$?

Exercice 6

Calculer les sommes vectorielles indiquées en utilisant la figure ci-contre :

(1) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO}$

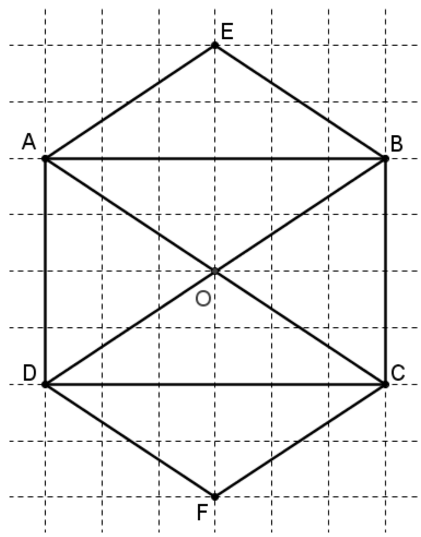
(2) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF}$

(3) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AO}$

(4) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{FC}$

(5) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$

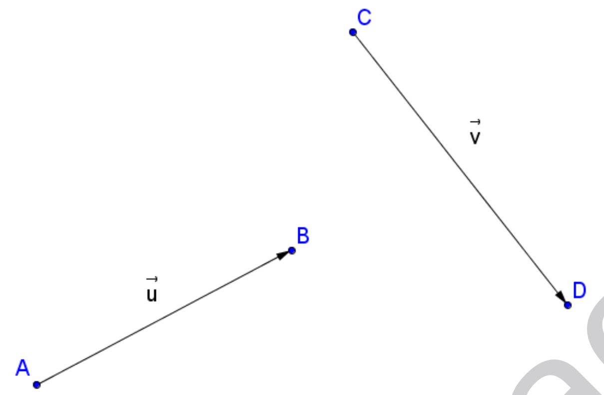
(6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



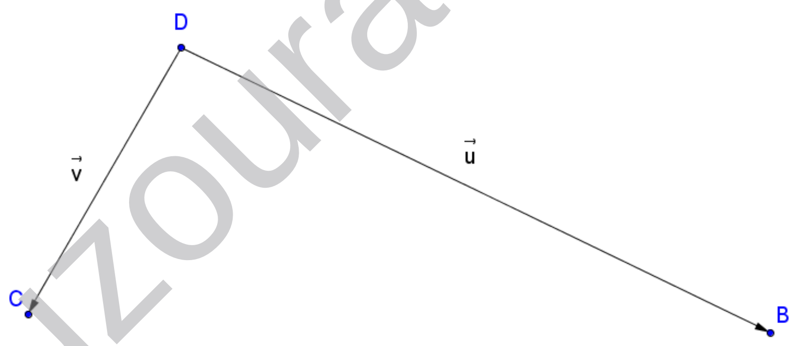
Exercice résolu 7

Déterminer la somme des vecteurs sur chacune des figures suivantes et expliquer votre démarche.

(1)

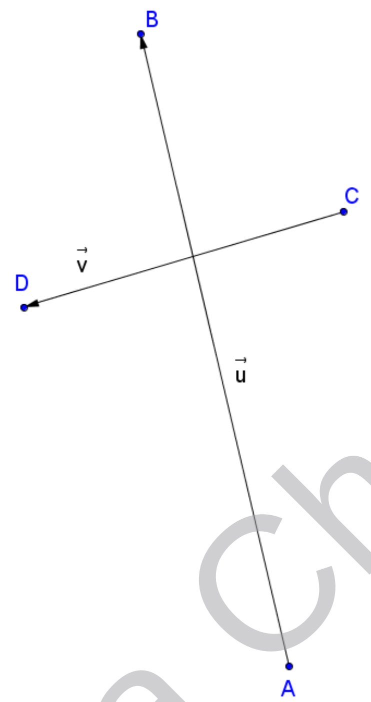


(2)

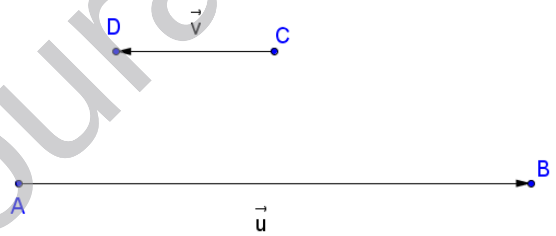


(3)

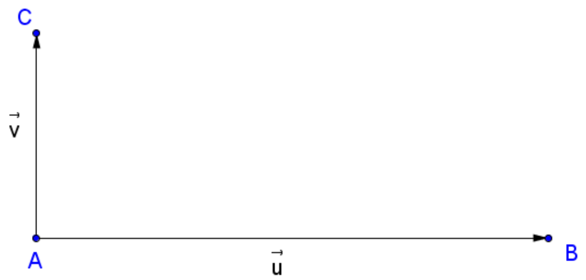
(4)



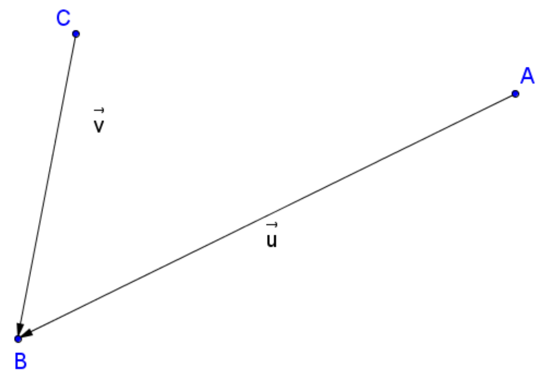
(5)



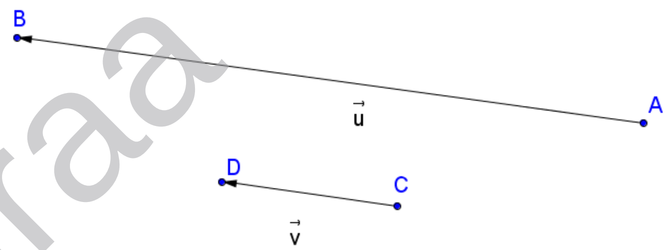
(6)



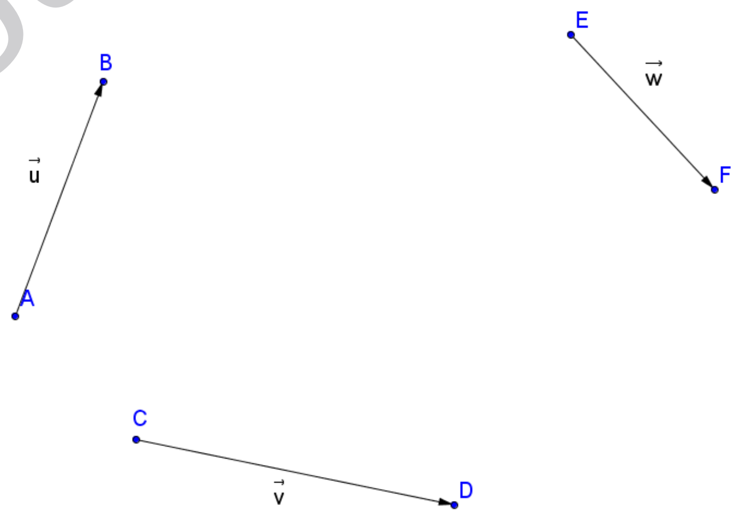
(7)



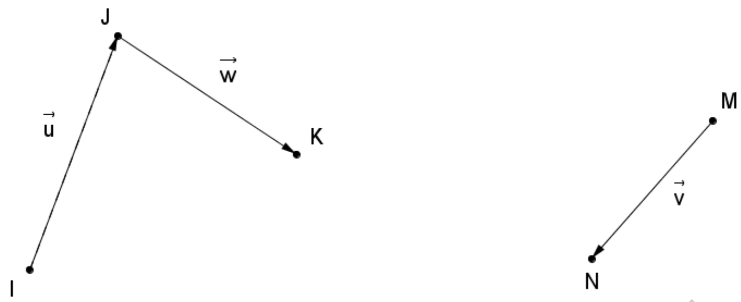
(8)



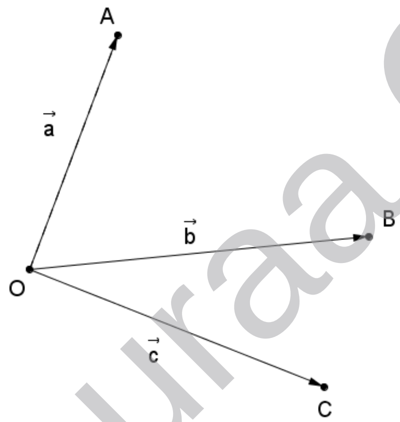
(9)



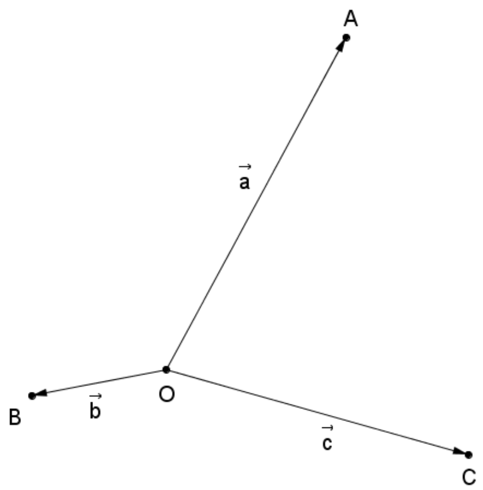
(10)



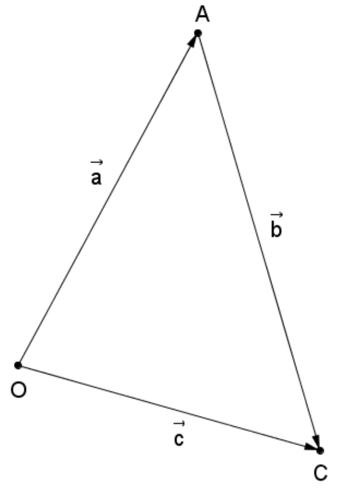
(11)



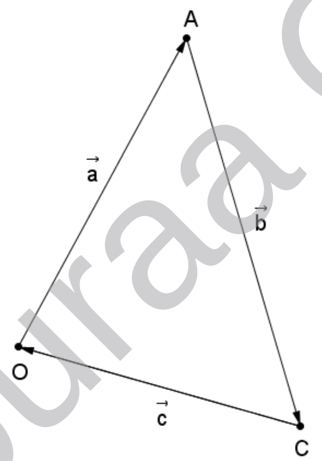
(12)



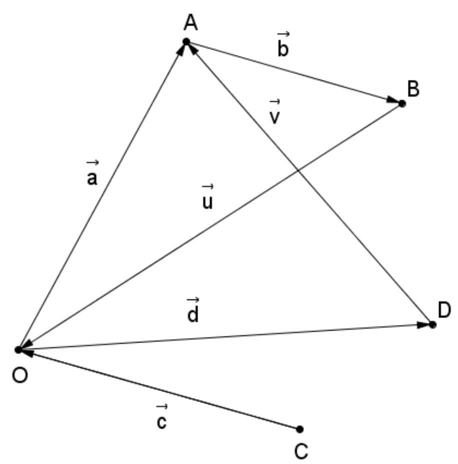
(13)


A
$\vec{a}$
$\vec{b}$
O
$\vec{c}$
C

(14)


A
$\vec{a}$
$\vec{b}$
O
$\vec{c}$
C

(15)


A
$\vec{b}$
B
$\vec{v}$
$\vec{a}$
$\vec{u}$
$\vec{d}$
D
O
$\vec{c}$
C

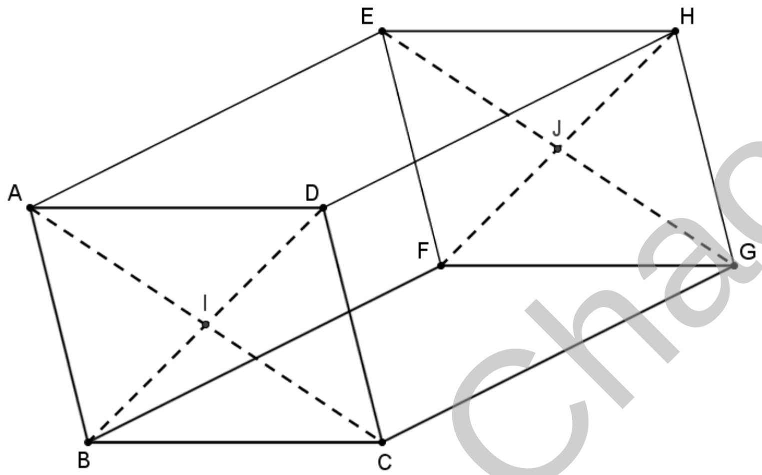
Exercice 8

(1) Sur les figures (1) à (8) de l'exercice 7, construire $\vec{u} - \vec{v}$.

(2) Sur les figures (9) et (10) de l'exercice 7, construire $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$.

(3) Sur les figures (11) et (12) de l'exercice 7, construire $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b} - \vec{c}$ et $\vec{w} = \vec{a} - \vec{c}$. Quelle est la relation entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

Exercice résolu 9



Sur la figure ci-dessus, formée de parallélogrammes juxtaposés, déterminer un représentant de

(1) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF}$

(2) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{BC}$

(4) $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DH}$

(5) $\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{BF}$

(6) $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{JI}$

(7) $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{AI}$

(8) $\overrightarrow{IF} - \overrightarrow{FJ}$

(9) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$

(10) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{BD}$

(11) $\overrightarrow{JE} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{ID}$

(12) $\overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BI}$

(13) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{FH}$

(14) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{FH}$

Déterminer le point O sur la figure tel que : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{IA}$.

Déterminer le point P sur la figure tel que : $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB}$

Exercice 10

Démontrer les propriétés vectorielles suivantes à l'aide d'une figure.

(1) $-(-\vec{a}) = \vec{a}$

(2) $\vec{v} - \vec{u} = -(\vec{u} - \vec{v})$

(3) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

(4) $\vec{a} - (\vec{e} - \vec{r}) = \vec{a} - \vec{e} + \vec{r}$

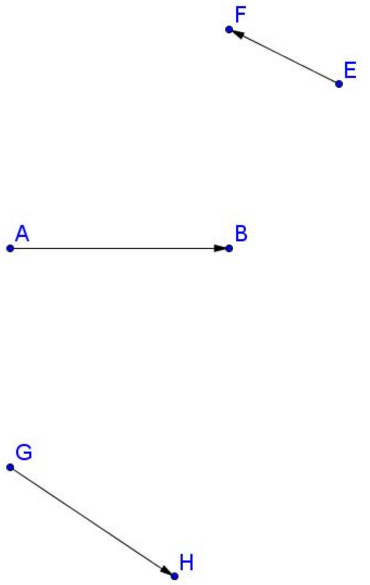
(5) $2 \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} - 2\vec{b}$

(6) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{u} = 2\vec{u} + \vec{v}$

(7) $-3 \cdot (2\vec{u}) = -6\vec{u}$

(8) $2 \cdot (-\frac{5}{3}\vec{z}) = -\frac{10}{3}\vec{z}$

Exercice résolu 11



Sur la figure ci-dessus, construire le point

(1) I tel que $\overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{AB}$

(2) J tel que $\overrightarrow{GJ} = -\overrightarrow{AB}$

(3) K tel que $\overrightarrow{CK} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$

(4) L tel que $\overrightarrow{LC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

(5) M tel que $\overrightarrow{MA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EF}$

(6) N tel que $\overrightarrow{NH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

(7) P tel que $\overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CD}$

(8) Q tel que $\overrightarrow{HQ} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right)$

Exercice 12

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Construire les points M, N, P, Q définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \ ; \ \overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \ ;$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \ ; \ 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{QD} = 3\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \, .$$

Exercice 13

A et B étant deux points distincts donnés, construire si possible les points inconnus Q, R, S, T, U, V, W, X, Y et Z en résolvant les équations vectorielles correspondantes :

(1) $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{QB}$

(2) $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RB}$

(3) $\overrightarrow{AS} = 5\overrightarrow{BS}$

(4) $\overrightarrow{BT} - 3\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{AB}$

(5) $\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{BU} = \vec{0}$

(6) $\overrightarrow{AV} + \overrightarrow{VB} = \vec{0}$

(7) $2\overrightarrow{AW} = -\overrightarrow{WB}$

(8) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = 2\overrightarrow{AB}$

(9) $2\overrightarrow{AY} - 3\overrightarrow{BY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(10) $-2\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{BZ} = 2\overrightarrow{BA}$

Exercice 14

A et B étant deux points distincts donnés, construire les points M et P tels que : $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{PA} - 5\overrightarrow{BP} = \vec{0}$

Exercice 15

A, B et C étant trois points non alignés donnés, construire si possible les points inconnus U, V, W, X, Y et Z en résolvant les équations vectorielles correspondantes :

(1) $\overrightarrow{UA} + \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{UC} = \overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{AV} - \overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VC} = \vec{0}$

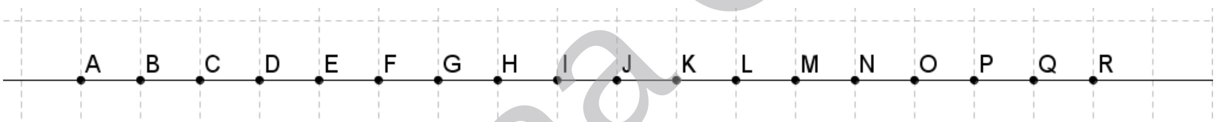
(3) $2\overrightarrow{AW} - \overrightarrow{BW} - \overrightarrow{CW} = \overrightarrow{AB}$

(4) $-3\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$

(5) $\overrightarrow{AY} - 2\overrightarrow{BY} + 3\overrightarrow{CY} = 2\overrightarrow{AB}$

(6) $\overrightarrow{AZ} - 3\overrightarrow{ZB} = 2\left(\overrightarrow{CZ} + \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{BC}\right)$

Exercice résolu 16



En observant la figure ci-dessus, compléter les relations de colinéarité suivantes :

(1) $\overrightarrow{AE} = ...\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = ...\overrightarrow{AE}$

(2) $\overrightarrow{GD} = ...\overrightarrow{JP}$ et $\overrightarrow{JP} = ...\overrightarrow{GD}$

(3) $\overrightarrow{CL} = ...\overrightarrow{QN}$ et $\overrightarrow{NQ} = ...\overrightarrow{CL}$

(4) $\overrightarrow{DH} = ...\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FA} = ...\overrightarrow{HD}$

(5) $\overrightarrow{GR} = ...\overrightarrow{IQ}$ et $\overrightarrow{IQ} = ...\overrightarrow{GR}$

(6) $\overrightarrow{OH} = ...\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OE} = ...\overrightarrow{OH}$

(7) $\overrightarrow{BP} = ...\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{PB} = ...\overrightarrow{LG}$

(8) $\overrightarrow{QI} = ...\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IQ} = ...\overrightarrow{EI}$

(9) $\overrightarrow{JE} = ...\overrightarrow{JQ}$ et $\overrightarrow{JQ} = ...\overrightarrow{JE}$

(10) $\overrightarrow{MK} = ...\overrightarrow{KG}$ et $\overrightarrow{GK} = ...\overrightarrow{MK}$

(11) $\overrightarrow{DN} = ...\overrightarrow{HR}$ et $\overrightarrow{HR} = ...\overrightarrow{ND}$

(12) $\overrightarrow{LA} = ...\overrightarrow{RB}$ et $\overrightarrow{RB} = ...\overrightarrow{AL}$

(13) $\overrightarrow{FL} = ...\overrightarrow{NE}$ et $\overrightarrow{NE} = ...\overrightarrow{LF}$

(14) $\overrightarrow{KJ} = ...\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{PB} = ...\overrightarrow{JK}$

(15) $\overrightarrow{AA} = ...\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BB} = ...\overrightarrow{IJ}$

(16) $\overrightarrow{IO} = ...\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{RA} = ...\overrightarrow{OI}$

(17) $\overrightarrow{BK} = ...\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{BK} = ...\overrightarrow{LC}$

(18) $\overrightarrow{GG} = ...\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} = ...\overrightarrow{GG}$

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants, déterminer une relation de colinéarité entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis faire une figure :

(1) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$

(2) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$

(4) $2\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$

(5) $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

(6) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$

Exercice résolu 18

Soit A et B deux points distants de 1,5 cm.

(1) Construire le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.

(2) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

(3) Compléter et démontrer la relation de colinéarité : $\overrightarrow{CD} = \ldots\overrightarrow{AB}$.

(4) En déduire la longueur du vecteur $\overrightarrow{CD}$ en cm.

Exercice 19

Soit ABC un triangle quelconque et D le point défini par :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

(1) Construire le point D.

(2) Exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(3) Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

(4) Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 20

Soit $ABCD$ quadrilatère quelconque, M le milieu de $[AB]$, N le milieu de $[BC]$, P le milieu de $[CD]$ et Q le milieu de $[AD]$.

(1) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

(2) En déduire la nature du quadrilatère $MNPQ$.

Exercice 21

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC et $A' = \text{mil}[BC]$, $B' = \text{mil}[CA]$, $C' = \text{mil}[AB]$. Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Exercice 22

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$.

Exercice 23

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC et $A' = \text{mil}[BC]$, $B' = \text{mil}[CA]$, $C' = \text{mil}[AB]$.

(1) Compléter les relations de colinéarité suivantes :

$$\overrightarrow{GA} = ...\overrightarrow{GA'} \ ; \ \overrightarrow{GB} = ...\overrightarrow{GB'} \ ; \ \overrightarrow{GC} = ...\overrightarrow{GC'}.$$

(2) En déduire que G est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Exercice 24

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC et $A' = \text{mil}[BC]$, $B' = \text{mil}[CA]$, $C' = \text{mil}[AB]$.

(1) Construire les points P,Q et R tels que :

a) $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$, b) $\overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA}$ et c) $\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$.

(2) Montrer que : $\overrightarrow{GP} = -\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GQ} = -\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GR} = -\overrightarrow{GC}$.

(3) Quelle est l'isométrie qui transforme le triangle ABC en le triangle PQR ?

Exercice 25

Soit G et G' les centres de gravité de deux triangles ABC et DEF respectivement.

(1) Montrer que : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{GG'}$.

(2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux triangles aient le même centre de gravité.

Exercice 26

Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC.

(1) Montrer qu'il existe un point unique D tel que $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$.

(2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABGD$?

Exercice 27

Soit ABC un triangle.

(1) Construire les points I, J et K tels que :

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

(2) Démontrer que les droites AI, BJ et CK sont concourantes en G, centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 28

Soit G le ***centre de gravité*** d'un quadrilatère quelconque $ABCD$, c.-à-d. G est l'***unique point*** vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$$

(1) Construire le point G après avoir démontré que :

$$\overrightarrow{AG}=\tfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$$

(2) Soit M le milieu de $[AB]$ et P le milieu de $[CD]$. Donner une construction plus simple du point G après avoir démontré que $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$.

(3) Soit N le milieu de $[BC]$ et Q le milieu de $[AD]$. Donner une construction encore plus simple du point G après avoir démontré que $\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$.

(4) Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

Exercice 29

Soit ABC un triangle quelconque, O le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ à ABC et A' le milieu de $[BC]$. On définit le point H par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

(1) a) Démontrer que : $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$.

b) En déduire que H appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

(2) a) Démontrer de même que H appartient aux deux hauteurs issues de B et de C respectivement dans le triangle ABC.

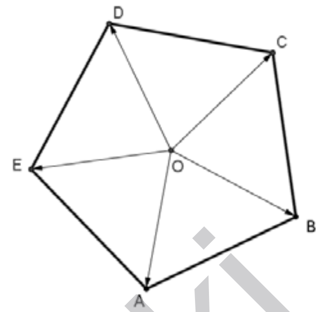
b) Quel théorème vient-on de démontrer de cette façon ? Rappeler comment on appelle le point H dans le triangle ABC.

(3) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. En utilisant une caractérisation vectorielle de G, démontrer que : $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. Que peut-on en déduire pour les points O, G et H ? Enoncer le théorème démontré ainsi.

Remarque : La droite passant par les points O, G et H est appelé ***droite*** d'Euler.

(4) Montrer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux milieux des côtés du triangle sont situés sur le cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle.

(5) Montrer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle sont situés sur le cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle.



Exercice 30

La figure ci-contre représente le ***pentagone régulier*** $ABCDE$ de centre O, c.-à-d. O est le centre du cercle circonscrit à ce pentagone.

(1) Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}//\overrightarrow{OD}$. ***Indication*** : OD est un axe de symétrie du pentagone $ABCDE$.

(2) Montrer de même que $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}//\overrightarrow{OD}$.

(3) En déduire que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}//\overrightarrow{OD}$

(4) Montrer qu'on a également :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}//\overrightarrow{OE}.$$

(5) En déduire que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

(O est donc le centre de gravité du pentagone $ABCDE$.)

(6) Utiliser le résultat précédent pour prouver que :

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ et

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

Exercice 31

Soit ABC un triangle. On définit les points D, F et G par

$$\overrightarrow{AD}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AF}=\tfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{GC}=5\overrightarrow{GA}.$$

(1) Par D on trace la parallèle à BC qui coupe AC en E. Donner les relations de colinéarité entre a) les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CB}$. Justifier.

(2) Démontrer que GF et DE sont parallèles. Justifier !

Exercice 32

Soit un parallélogramme $ABCD$ de centre O.

(1) Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE}=\tfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FC}$.

(2) Montrer que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{FC}$.

(3) Montrer que $BEFD$ est un parallélogramme.

(4) Soit $I=\text{mil}[AD]$ et $J=\text{mil}[BC]$. Montrer que $IEJF$ est un parallélogramme.

(5) La droite BE coupe respectivement AD en G et CD en H. Montrer que :

- $\overrightarrow{AG}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

- $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH}$
- $\overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{DC}$

Exercice 33

Soit $ABCD$ un rectangle, $I = \text{mil}[AB]$ et $J = \text{mil}[DC]$. Les droites DI et BC sont sécantes en K et les droites KJ et DB sont sécantes en G.

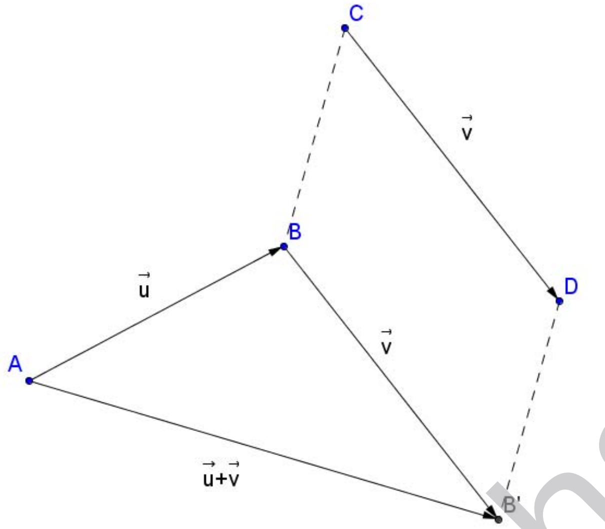
(1) Démontrer que $\overrightarrow{KG} = 2\overrightarrow{GJ}$. Que représente G pour le triangle DCK ?

(2) Démontrer que $GC \,//\, AJ$.

(3) AJ coupeDB en H. Démontrer que $IGJH$ est un parallélogramme.

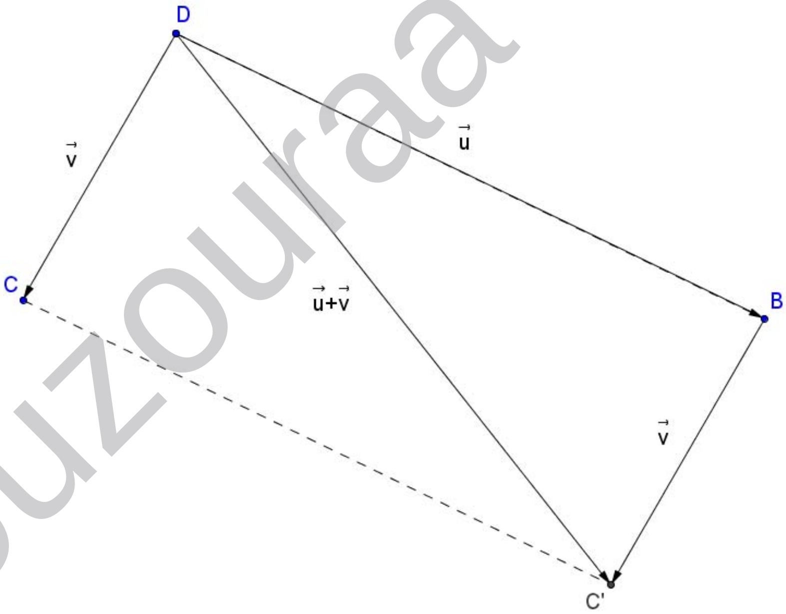
Solution de l'exercice 7

(1)



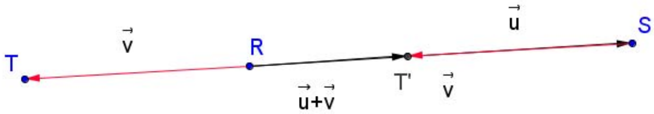
$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB'}$$

(2)



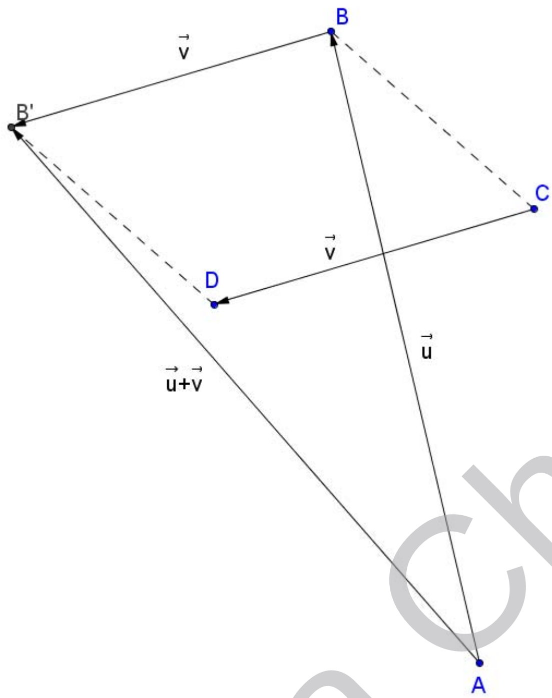
$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{DC'}$$

(3)



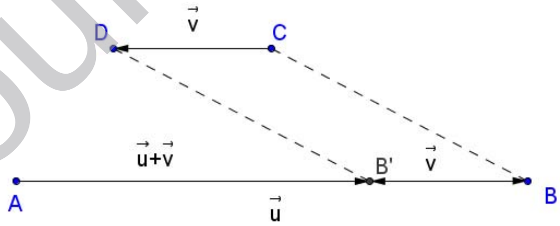
$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RT}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST'}=\overrightarrow{RT'}$$

(4)



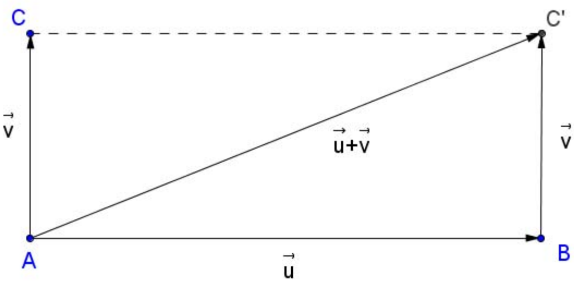
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'}$$

(5)



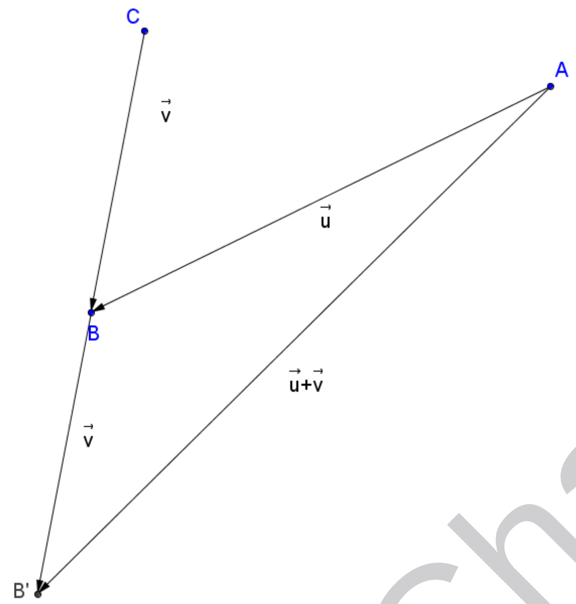
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'}$$

(6)



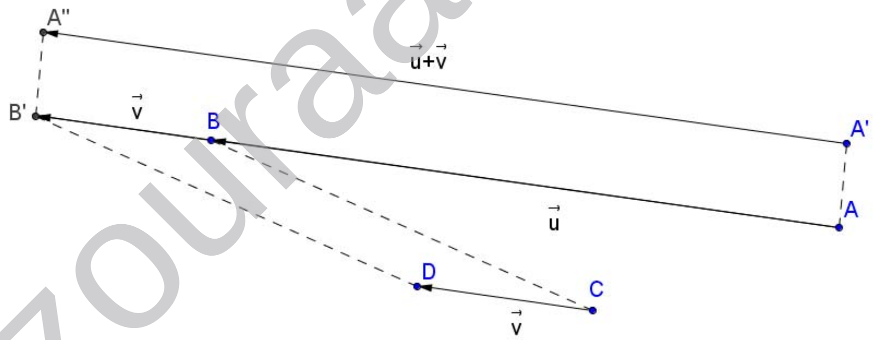
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC'}$$

(7)



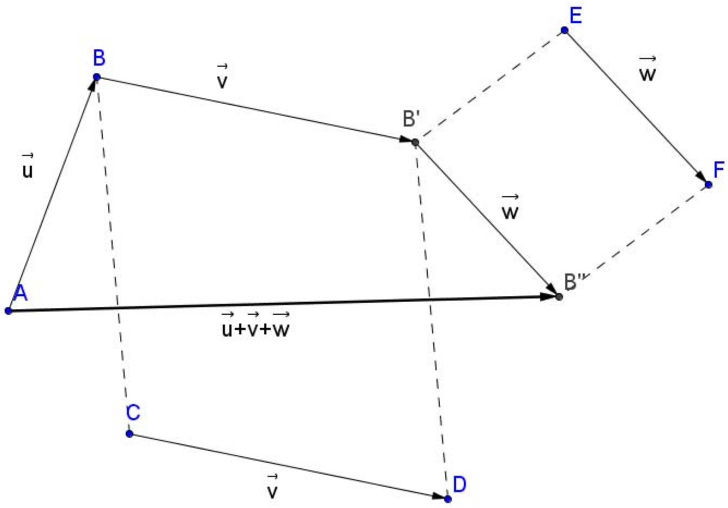
$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB'}$$

(8)



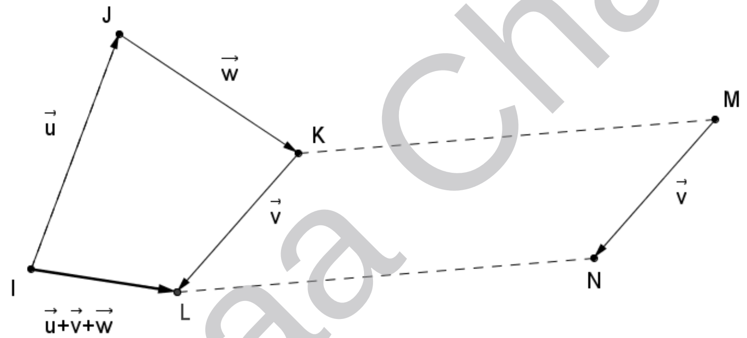
$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{A'A''}$$

(9)



$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'B''}=\overrightarrow{AB''}$$

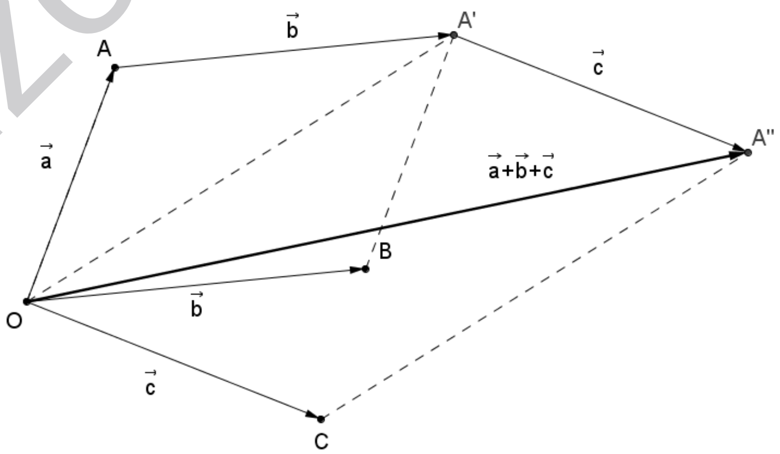
(10)



$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(\vec{u}+\vec{w})+\vec{v}=\left(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JK}\right)+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{IL}$$

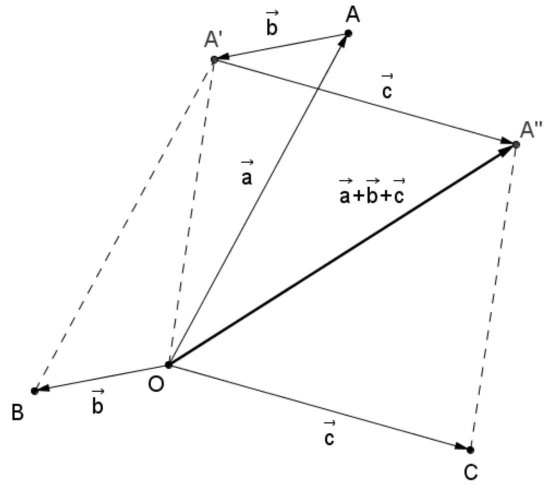
(On a utilisé la commutativité et l'associativité de l'addition des vecteurs.)

(11)



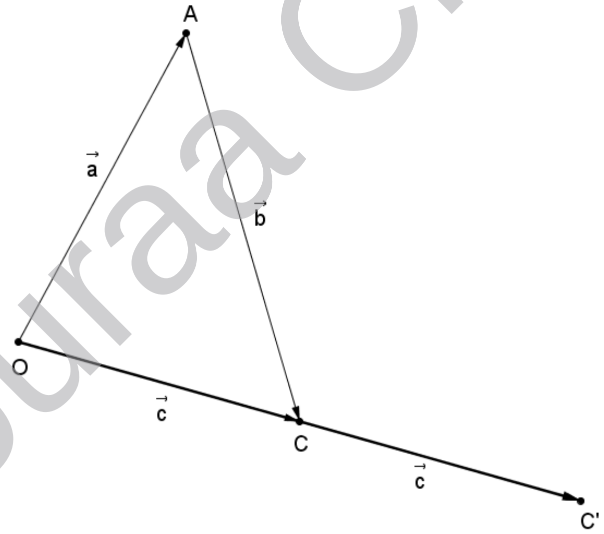
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A''}=\overrightarrow{OA''}$$

(12)



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A''}=\overrightarrow{OA''}$$

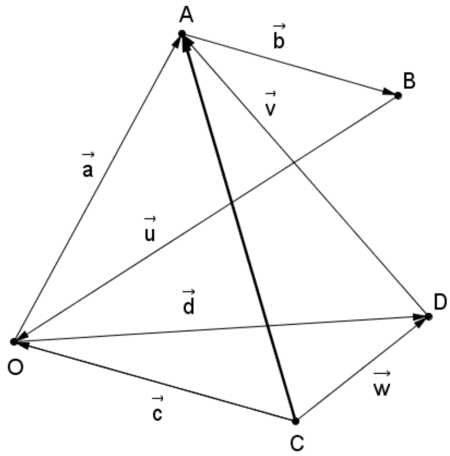
(13)



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{OC'}\ (=2\vec{c}\,)$$

(14) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}$ (vecteur nul)

(15)



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{u}+\vec{v}$$
$$=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{u}\right)+\left(\vec{c}+\vec{d}\right)+\vec{v}$$
$$=\vec{0}+\vec{w}+\vec{v}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$$

Solution de l'exercice 9

(1) $\overrightarrow{AE}$ (2) $\overrightarrow{EC}$ (3) $\vec{0}$ (4) $\overrightarrow{HE}$ (5) $\overrightarrow{CJ}$ (6) $\overrightarrow{JB}$

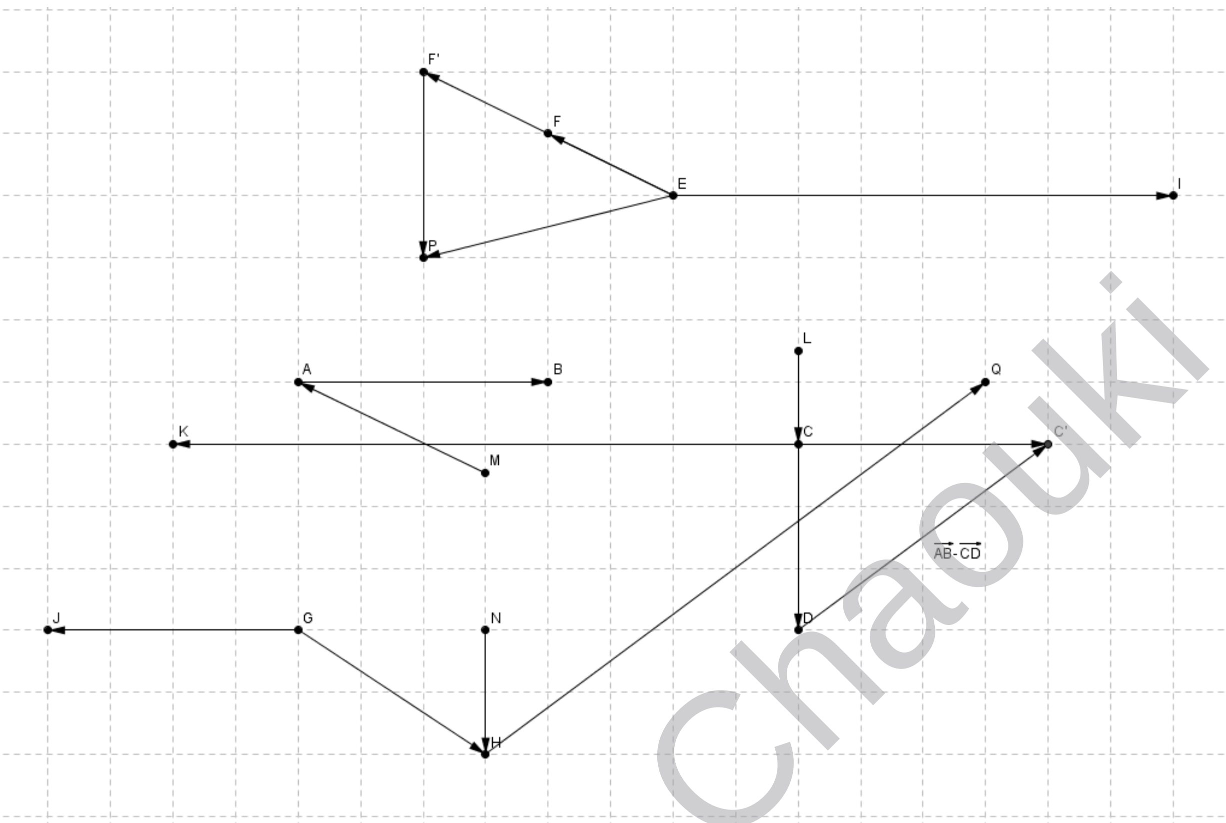
(7) $\overrightarrow{FJ}$ (8) $\overrightarrow{DF}$ (9) $\overrightarrow{AH}$ (10) $\overrightarrow{AD}$ (11) $\vec{0}$ (12) $\overrightarrow{BD}$

(13) $\left(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{CG}\right)+\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{IA}$ (14) $\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow O=\text{mil}[EF]$

$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow P=\text{mil}[GC]$

Solution de l'exercice 11



Solution de l'exercice 16

En observant la figure ci-dessus, compléter les relations de colinéarité suivantes :

(1) $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

(2) $\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JP}$ et $\overrightarrow{JP} = -2\overrightarrow{GD}$

(3) $\overrightarrow{CL} = -3\overrightarrow{QN}$ et $\overrightarrow{NQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CL}$

(4) $\overrightarrow{DH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FA} = \frac{5}{4}\overrightarrow{HD}$

(5) $\overrightarrow{GR} = \frac{11}{8}\overrightarrow{IQ}$ et $\overrightarrow{IQ} = \frac{8}{11}\overrightarrow{GR}$

(6) $\overrightarrow{OH} = \frac{7}{10}\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OE} = \frac{10}{7}\overrightarrow{OH}$

(7) $\overrightarrow{BP} = -\frac{14}{5}\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{PB} = \frac{14}{5}\overrightarrow{LG}$

(8) $\overrightarrow{QI} = 2\,\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IQ} = 2\,\overrightarrow{EI}$

(9) $\overrightarrow{JE} = -\frac{5}{7}\overrightarrow{JQ}$ et $\overrightarrow{JQ} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{JE}$

(10) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KG}$ et $\overrightarrow{GK} = -2\,\overrightarrow{MK}$

(11) $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{HR}$ et $\overrightarrow{HR} = -\overrightarrow{ND}$

(12) $\overrightarrow{LA} = \frac{11}{16}\overrightarrow{RB}$ et $\overrightarrow{RB} = -\frac{16}{11}\overrightarrow{AL}$

(13) $\overrightarrow{FL} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{NE}$ et $\overrightarrow{NE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{LF}$

(14) $\overrightarrow{KJ} = -\frac{1}{14}\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{PB} = -14\,\overrightarrow{JK}$

(15) $\overrightarrow{AA} = 0\,\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BB} = 0\,\overrightarrow{IJ}$

(16) $\overrightarrow{IO} = \frac{6}{17}\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{RA} = \frac{17}{6}\overrightarrow{OI}$

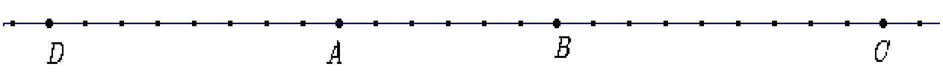
(17) $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{LC}$

(18) $\overrightarrow{GG} = 0\,\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} = ...\overrightarrow{GG}$

impossible !

Solution de l'exercice 18

(1) et (2) :



(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\\ &= -\tfrac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \tfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= \left(-\tfrac{5}{2} - 1 - \tfrac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB}\\ &= -\tfrac{29}{6}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \tfrac{29}{6} \cdot 1{,}5\\ &= \tfrac{29}{6} \cdot \tfrac{3}{2}\\ &= \tfrac{29}{4} = 7{,}25 \text{ cm}\end{aligned}$$