REPUBLIQUETUNISIENNE **PROF/ MABROUKI SALAH**

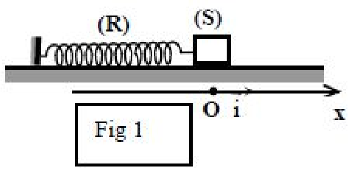
MINESTRE DE L'EDUCATION ET DE LAFORMATION **SERIE N°8** **SEANCE N°16**

SECTION / SCIENCE-TECHNIQUE-EXP-MATHS

©©© Osc ~ Libre ~ amortie et n. amortie~ mec 1 ©©©

EXERCICEN°1

Un solide (S) de masse m=100g est attaché à l'une des extrémités d'un ressort horizontal, parfaitement élastique, de constante de raideur K et de masse négligeable devant celle du solide, l'autre extrémité du ressort étant fixe (fig1). On étudie le mouvement du solide (S) relativement à un repère galiléen $(o,\vec{i})$ horizontal, d'origine O coïncidant avec la position



d'équilibre du centre d'inertie du solide.

On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre dans le sens négatif d'une distance x_0 puis à un instant pris comme origine du temps on le lance avec une vitesse initiale dans le sens positif. Au cours de son mouvement le solide (S) n'est soumis à aucune force de frottement.

1- a- Etablir l'équation différentielle régissant les variations de l'élongation x(t).

b- Sachant que la solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $x(t)=X_m\sin(\omega_0 t+\varphi_x)$, déterminer l'expression de ω_0.

c- Montrer que $v^2+\omega_0^2x^2=\omega_0^2X_m^2$

2- On donne le graphe représentant l'évolution au cours du temps de la vitesse et de l'accélération du centre d'inertie du solide (S). (Figure 2)

a- Identifier en le justifiant les courbes (C_1) et (C_2).

b- Déterminer à partir du graphe les expressions de l'accélération a(t) et de la vitesse v(t).

c- En déduire la valeur de la raideur K du ressort, l'amplitude des élongations X_m et la phase initiale φ_x.

3- L'énergie totale du système {solide+ressort} est E= Ec+Ep.

a- Montrer que l'énergie totale est constante et l'exprimer en fonction de K et X_m

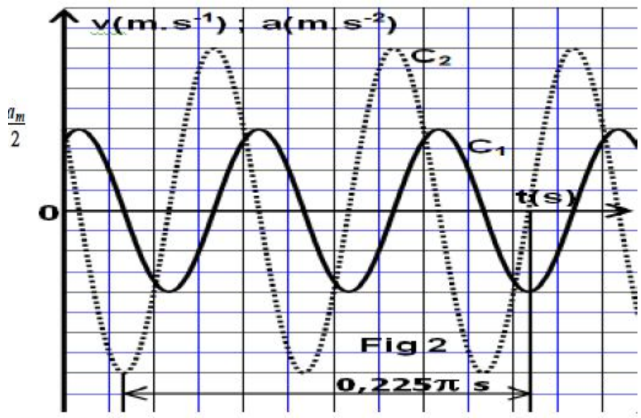
b- Calculer sa valeur.

c- Etablir l'expression de l'énergie potentielle Ep du système {solide+ressort} en fonction de K, Xm, ω_0, t et φ_x

d- Représenter Ep(t). On donne l'échelle suivante :

- ***0,05πs → 4 cm***

• $10^{-2} J \rightarrow 1\ cm$



Echelle :
Vitesse : $0{,}2\ m.s^{-1} \rightarrow 1$ carreau
Accélération : $2\ m.s^{-2} \rightarrow 1$ carreau

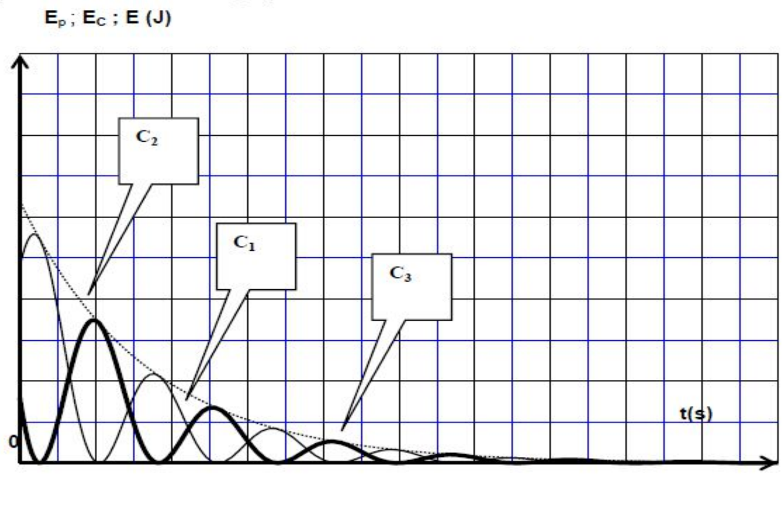
Partie B :

Dans cette partie, le solide (S) est soumis à une force de frottement de type visqueu $\vec{f} = -h\vec{v}$. h est une constante positive.

1- Établir l'équation différentielle de mouvement du solide (S) régissant les variations de son élongation x(t).

2- Montrer que l'énergie totale du système $S_0 = \{(S)+ressort\}$ n'est pas conservée.

3- À l'aide d'un dispositif approprié, on a enregistré les variations des énergies Ep, Ec et E en fonction du temps ; on a obtenu les graphes suivants : Faire correspondre, en le justifiant, à chaque énergie la courbe correspondante.



EXERCICEN°2

On considère un pendule élastique formé par un solide (S) de masse m et un ressort (R) à spires non jointives et de raideur k. Le pendule peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal. On note x(t) l'abscisse du centre d'inertie G du solide (figure1).

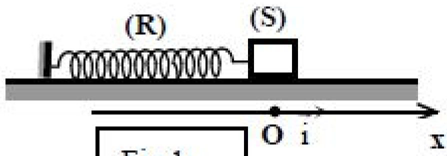


Fig 1

1/ Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit l'élongation x(t).

2/ La courbe de figure 2 représente l'évolution de l'élongation en fonction du temps x= f(t).

a- En exploitant cette courbe, écrire la loi horaire de l'élongation x(t).

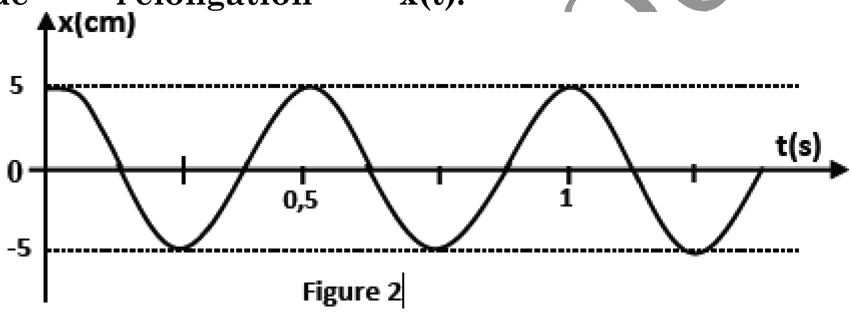


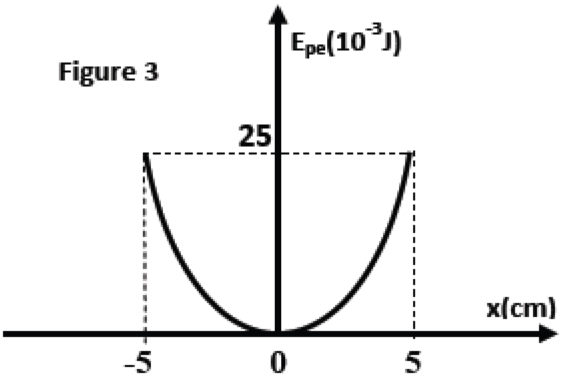
Figure 2

b- En déduire l'expression numérique de la vitesse instantanée v(t).

3/ Montrer que l'énergie mécanique E est constante au cours du temps.

4/ La courbe de la figure 3 représente l'énergie potentielle E_{pe} en fonction de l'élongation x.

Figure 3



a- Par exploitation de cette courbe,

- En déduire la valeur de m.

c- Déterminer la valeur de la vitesse du solide à v_1 lorsqu'il passe par la position d'abscisse x_1 = 4 cm en se dirigeant vers le sens négatif.

5/ Maintenant, le solide (S) est soumis à des forces de frottement dont la résultante $\vec{f} = -h\vec{v}$ où h est une constante qui représente le coefficient de frottement.

a- L'équation différentielle du mouvement du solide (S) est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4{,}96\frac{dx}{dt} + 158{,}7x = 0.$$

Déterminer la valeur de h.

b- La courbe d'évolution de l'élongation x en fonction du temps est représentée par la figure4.

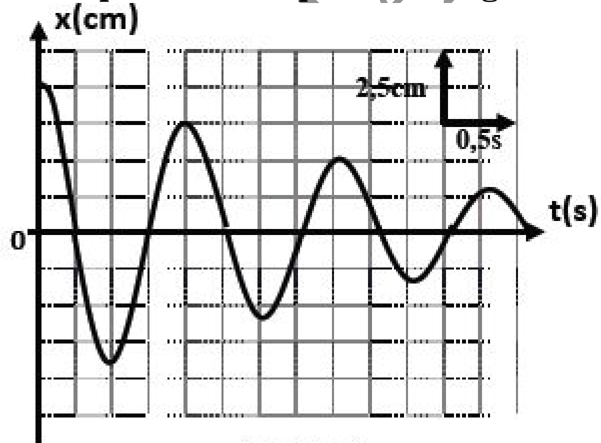


Figure 4

b_1 Nommer le régime d'oscillation.

b_2- Calculer la variation de l'énergie mécanique du pendule entre les instants t_0=0s et t_1=1s.

EXERCICEN°3

Lorsque C est en équilibre, son centre d'inertie G se trouve sur la verticale du point 0 et le ressort n'est ni allongé ni comprimé. On écarte le corps (C) de sa position d'équilibre (d'abscisse x = 0) et on le lâche sans vitesse initiale à t = 0.

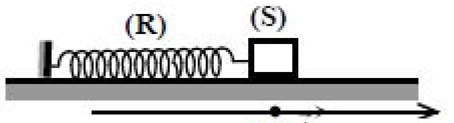


Fig 1

1 - Etablir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du corps (C).

2- L'enregistrement du mouvement de (C) donne la courbe x = f (t). figure 4

a- Ecrire l'équation horaire du mouvement de (C), en précisant l'amplitude X_m, la pulsation propre ω_0 et la phase initiale φ_x.

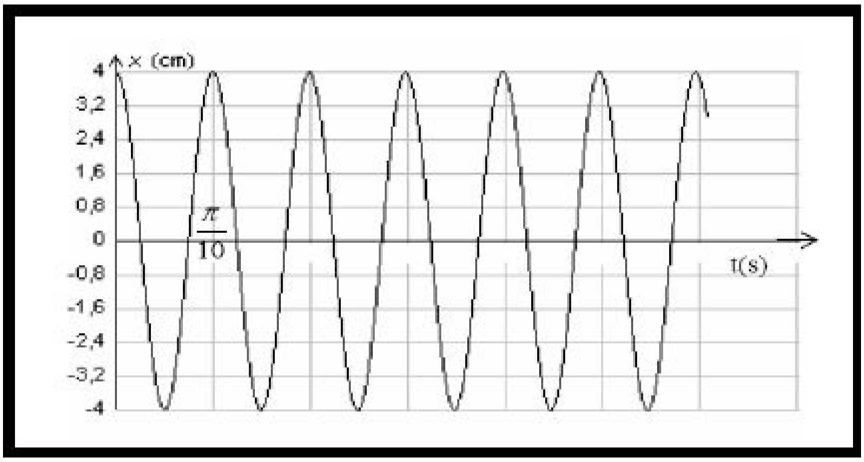


Figure 4

b- Calculer la valeur de la constante de raideur K du ressort.

3- a- Exprimer l'énergie mécanique E du système {corps (C), ressort} à un instant t quelconque lorsque (C) passe une position d'abscisse x à la vitesse v.

b- Déduire que l'énergie mécanique E du système est constante au cours du mouvement. Calculer sa valeur.

c- Exploiter la conservation de l'énergie pour montrer que $v^2 = -400\ x^2 + 64.10^{-2}$

d- Avec quelle vitesse le corps (C) passe-t-il pour la première fois par la position d'abscisse $x = 2,4$ cm?

4- On donne la courbe $Ep = f(t)$, représentant l'énergie potentielle du système (Figure 5).

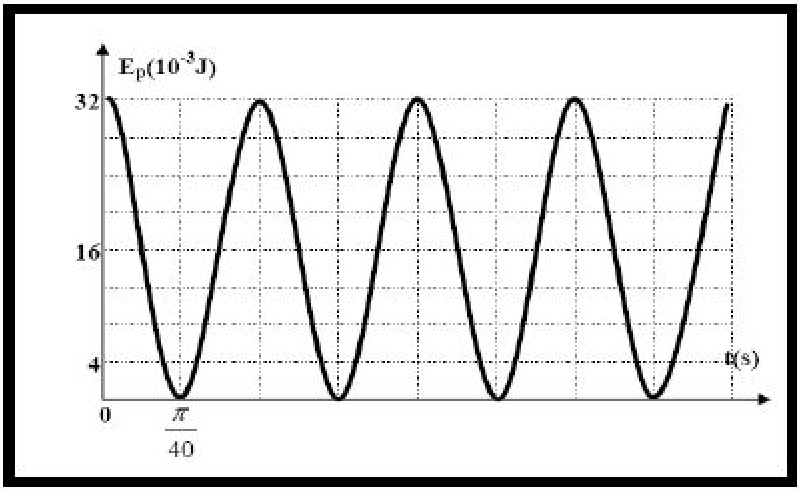


Figure 5

a- Comparer la période T de l'énergie potentielle Ep à la période propre T_0 de L'oscillateur.

b- Représenter clairement sur le document 3 (à remettre avec la copie) les courbes $Ec = f(t)$ Représentant l'énergie cinétique du corps C, et $E = h(t)$ représentant l'énergie Mécanique E du système {corps (C), ressort}.Justifier

EXERCICEN°4

Un pendule élastique disposé horizontal comme l'indique la figure-2- est formé par un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K, dont l'une des extrémités est fixe, et un solide (S) supposé ponctuel de masse m attaché à l'autre extrémité.
Au cours de son mouvement, le solide (S) se déplace le long d'un axe (xx') horizontal muni du repère $(o,\vec{i})$. Au repos, le centre d'inertie G de (S) occupe la position et son élongation est, à chaque instant, donnée par $x(t)= OG$.

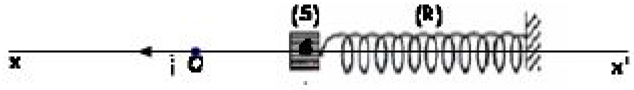


Figure - 2 -

Partie A *<u>On néglige tous types de frottements</u>*

On écarte (S) de sa position de repos. Quand la valeur algébrique de la tension du ressort prend la valeur Ti = - 2,56 N, on le lâche à lui même à un instant pris comme origine des temps.

1. Soit T la valeur algébrique de la tension $\vec{T}$ du ressort. Montrer que la variation de T est, aux cours du temps, régit par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{K}{m}T = 0\ .$$

En déduire que le centre d'inertie de solide effectue un mouvement rectiligne sinusoïdal par rapport au repère R, de période propre To qu'en exprimera en fonction de K et m.

2 .Un dispositif d'enregistrement des oscillations de (S) permet d'obtenir le diagramme de la figure-3- qui correspond aux variations de l'élongation x(t) en accord avec l'équation $x(t)= Xm\sin(2\pi N_0 t + \varphi x)$.

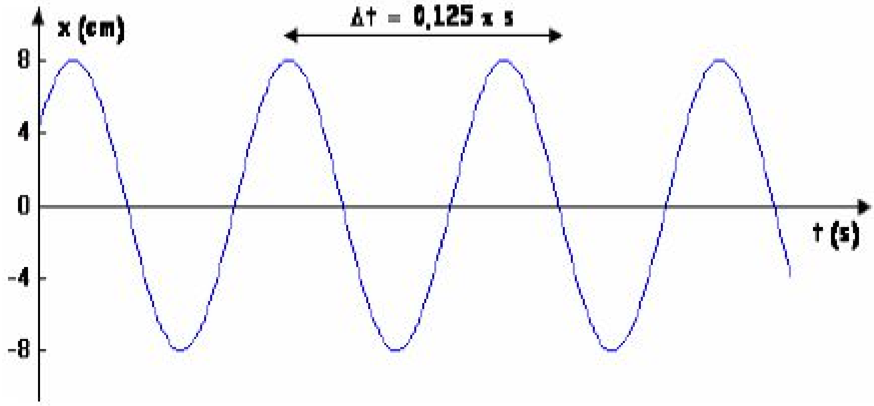


Figure-3-

3

a. En se servant de la courbe de variation de l'élongation x en fonction du temps, déterminer Xm, No et φx

b. Montrer que $K= 64Nm^{-1}$. En déduire la valeur de m et celle de l'énergie potentielle élastique E_p emmagasinée par le ressort à l'origine des temps.

c. Donner l'expression de T(t) valeur instantanée de la tension du ressort et représenter ses variations dans l'intervalle de temps compris entre 0 et 2,5To.

3.a. Etablir que, à une date quelconque, l'énergie mécanique E de ce pendule peut s'écrire sous la forme : $E = \frac{m}{2K^2}\left[\omega o^2\, T(t)^2 + (\frac{dT}{dt})^2\right]$E avec la pulsation propre ω_0 des oscillations mécaniques.

b. Montrer que l'énergie mécanique de ce pendule se conserve. En déduire sa valeur.

Partie B

En réalité, le solide (S) est, au cours de son mouvement, soumis à des forces de frottement de type visqueux équivalent à une force $\vec{f}$ de valeur algébrique

f = -h v avec v la vitesse de (S) et h le coefficient de frottement.

1. Exprimer f en fonction de h, K et $\frac{dT}{dt}$ puis établir l'équation différentielle qui régit les variations de T aux cours du temps.
2. A l'aide d'un système d'acquisition de données et un logicielle appropriés, un ordinateur affiche sur son écran le graphe de figure-4- représentant les variations de x au cours du temps.
a. Quel régime d'oscillation mécanique montre le graphe de la figure-4- ? Justifier la réponse.
b. Expliquer la diminution graduelle de l'énergie mécanique de ce pendule. Sous quelle forme cette énergie est dissipée ?
c. Déterminer la valeur moyenne de la pseudo période T'.
3. Calculer la perte d'énergie mécanique entre les dates 0,5 T' et 4 T'. Indiquer, en le justifiant, comment peut-on minimiser cette perte ?

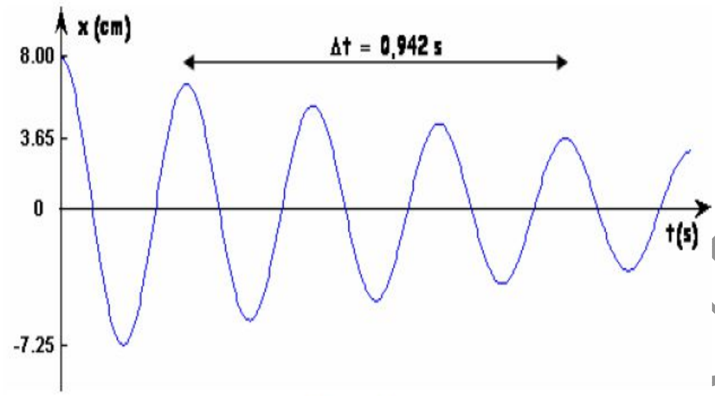


Figure-4-

EXERCICEN°5

On considère le dispositif suivant :

**- R est un ressort de masse négligeable, à spires non jointives et de constante de raideur K*

**- S est un solide supposé ponctuel de masse m = 100 g*

**- $(o,\vec{i})$ est un repère normé ou O coïncide avec la position du solide à l'équilibre. L'ensemble est placé sur un coussin d'air (les frottements sont supposées négligeables) Le solide (S) est écarté de sa position d'équilibre jusqu'au point A d'abscisse $x_0 > 0$ puis lâché à t= 0s avec une vitesse initiale V_0*

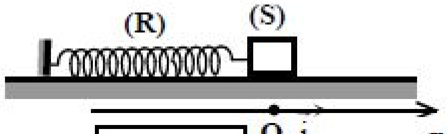


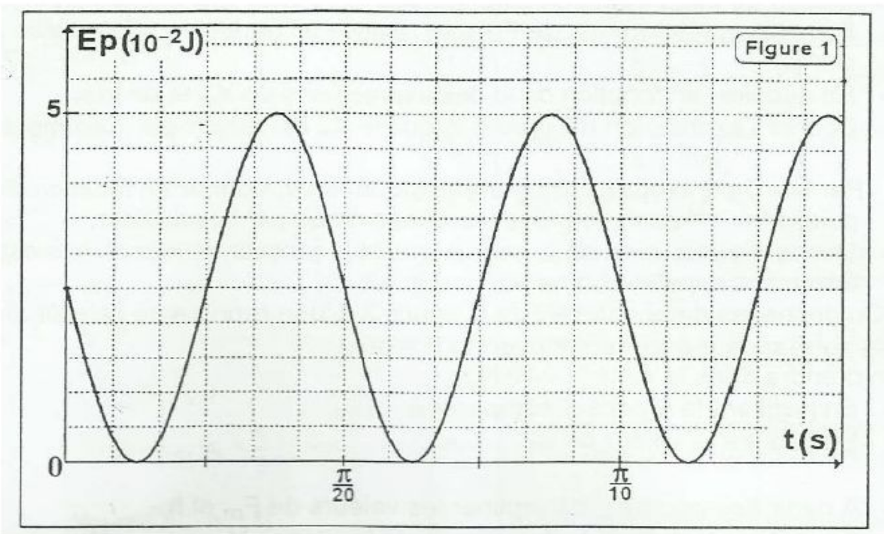
Fig 1

1/ -a - Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur relative à son élongation x

-b- En déduire la nature du mouvement de (S)

2/- Donner l'expression de l'énergie mécanique E de l'oscillateur lorsque G passe par un point d'abscisse x avec une vitesse v. Montrer que cette énergie se conserve

3/- La courbe de la figure 1 représente la variation de l'énergie potentielle élastique E_p en fonction du temps.



Déterminer :

a- La valeur de la période T_0 du mouvement de (S). En déduire la raideur K du ressort.

b- La valeur de l'énergie mécanique E de l'oscillateur. En déduire la valeur de l'amplitude X_m du mouvement.

c- La valeur initiale E_{P0} de l'énergie potentielle élastique .En déduire l'élongation initiale x_0.

4/-a - Tracer sur la figure 1 la courbe de la variation de l'énergie cinétique E_C en fonction du temps .

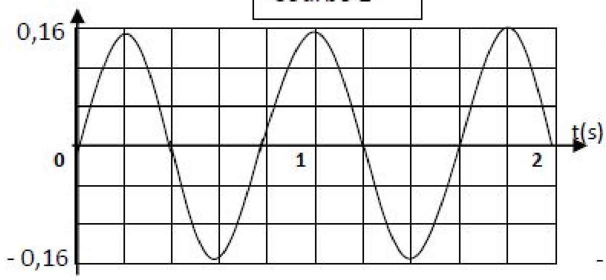
b - Préciser dans quel sens se déplace le solide à l'instant de date t= 0.justifier la réponse

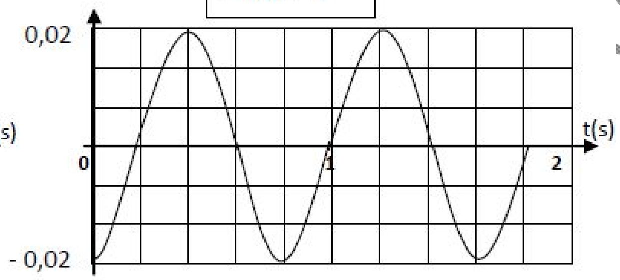
c - Calculer alors V

d- Etablir l'équation horaire du mouvement du solide (S)

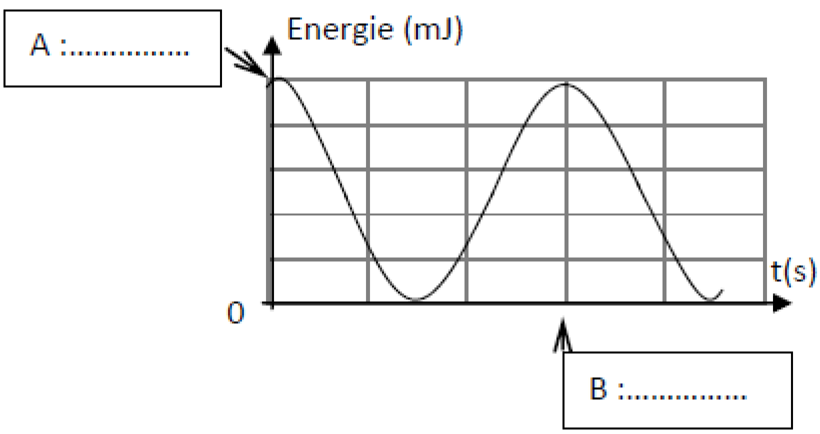
EXERCICEN°6

Une des extrémités d'un ressort de constante de raideur $K=30N.m^{-1}$ est relié à un support fixe, à l'autre extrémité est accroché un corps de masse m=500g. Au cours du mouvement du corps supposée sans frottement, on enregistre l'évolution en fonction du temps de l'élongation x(t) exprimée en (m), et la vitesse v(t) exprimée en ($m.s^{-1}$), on obtient les deux courbes 1 et 2.





1. Cet oscillateur est-il amorti ou non ?
2. a. Définir la période T0 d'un oscillateur mécanique.
b. Exprimer T0 en fonction de m et K et calculer sa valeur.
3. a. Parmi les des deux courbes 1 et 2, laquelle représente x(t) ? Justifier.
b. L'élongation s'écrit de la forme $x(t)=\alpha\cos(\beta t+\gamma)$.
Déterminer les valeurs de α, β et γ , et en précisant leurs noms et leurs unités.
c. Mesurer, en utilisant l'autre courbe, la valeur maximale de la vitesse Vm?
4. a. Exprimer l'énergie potentielle élastique EPe(t) en fonction de k et x.
b. Exprimer l'énergie cinétique Ec(t) en fonction de m et v.
c. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E de cet oscillateur en fonction de m et Vm.
Calculer sa valeur.
d Indiquer, en justifiant, l'énergie représentée ci-dessous. Préciser les valeurs de A et B.



EXERCICEN°7

Un solide ponctuel (C) de masse m =0,2 kg est attaché à l'extrémité d'un ressort (R) à spires non jointives, de raideur K et de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixe.

L'ensemble est situé sur un banc à coussin d'air horizontal. On néglige tous les frottements.

On choisira un axe x'x parallèle au banc et on prendra comme, origine des élongations, la position de repos O du solide (C). Au repos le centre de gravité (G) du solide se trouve en O.

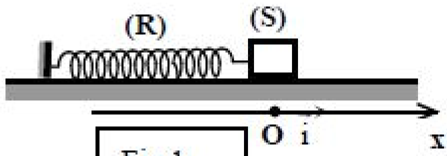


Fig 1

1) On écarte le solide (C) de sa position de repos, dans le sens des élongations positives, d'une distance x0 et on l'abandonne à lui-même à la date t=0s, sans vitesse initiale.

a- Etablir l'équation différentielle des oscillations du solide, en représentant les forces qui lui sont appliquées.

b. Quel est le phénomène physique observé ? Exprimer la fréquence propre N0 des oscillations en fonction de K et m.

2) A une date t ultérieure, l'élongation du solide (C) est x et sa vitesse est $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$

. L'énergie potentielle de pesanteur est nulle sur le plan horizontale de référence passant par le point G.

a- Ecrire l'expression de l'énergie potentielle Ep du système déformable: S={ (C)+ (R)} en fonction de x et K.

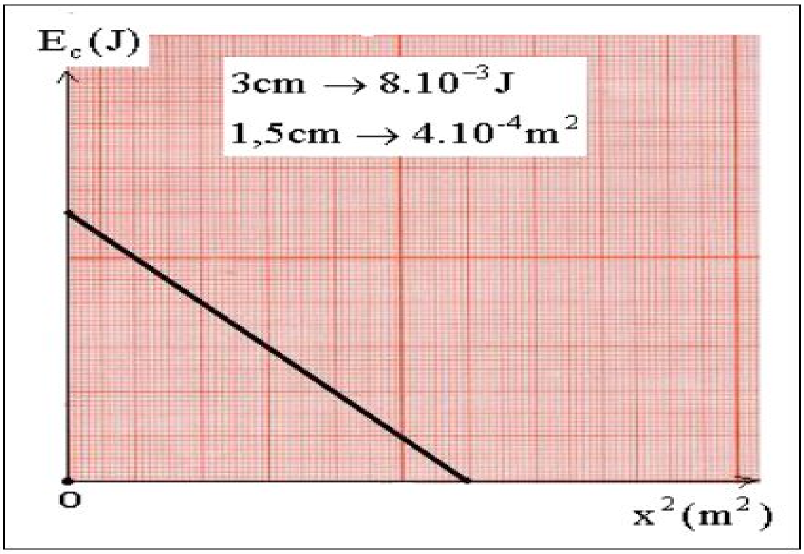
b- Montrer que l'énergie mécanique totale E du système (S) est constante et donner son expression en fonction de K et x0.

c- En déduire l'expression de l'énergie cinétique Ec de (C) en fonction de x ; K et x0. Quelle est l'expression de sa valeur maximale, en fonction de m, w0 et Xm (amplitude des oscillations)

3) Une étude expérimentale a permis de tracer la courbe : Ec=f (x2) (Voir figure)

a- En exploitant cette courbe et en se servant de la question (2/ c), déterminer l'amplitude Xm des oscillations, la pulsation propre w0 du mouvement de (C) et la constante de raideur K du ressort.

b- Représenter sur le même système d'axe et avec la même échelle les courbes de variation de Em et Ep en fonction de x^2.



EXERCICEN°8

Un solide (S) de masse m est fixé à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, de raideur k et de masse négligeable devant m. L'autre extrémité du ressort (R) est maintenue fixe. Le solide (S) peut se déplacer sans frottement suivant la direction d'un axe horizontal (x'x). La position du centre d'inertie G de (S) est repérée par son abscisse x dans un repère (o,$\vec{i}$).; O correspond à la position de G lorsque le solide (S) est au repos et $\vec{i}$ est un vecteur unitaire porté par (x'x) comme l'indique la figure (1).

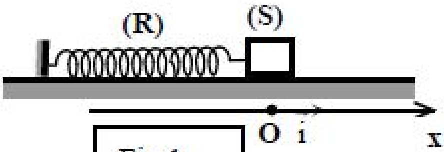


Fig 1

On déplace le solide (S) de sa position d'équilibre O vers une autre position M_0 d'abscisse x_0 et à un instant de date t = 0 s, on l'abandonne avec une vitesse de valeur algébrique v_0. Le mouvement du solide (S) est rectiligne sinusoïdal. L'accélération a du mouvement de son centre d'inertie G vérifie, à chaque instant, l'équation $a(t) = a_{max} \sin(2\pi N_0 t + \varphi_a)$ où a_{max}, N_0 et φ_a représentent respectivement l'accélération maximale, la fréquence propre des oscillations de G et la phase initiale.

1°/ Montrer qu'entre l'accélération a et l'élongation x on a la relation suivante : $a = - w_0^2 x$ où w_0 est la pulsation propre qu'on exprimera en fonction de k et m.

2°/ Un dispositif approprié, permet de tracer la courbe (2) représentant les variations de l'accélération a au cours du temps.

a°/ En utilisant la courbe de la figure (2), déterminer a_{max}, N_0 et φ_a.

b°/ Calculer X_0 et l'élongation maximale X_{max}.

3°/ La figure (3) représente les variations de l'énergie cinétique E_C du solide (S) au cours du temps. a°/ Montrer que $v_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} X_{max} w_0$ et calculer sa valeur.

b°/ Déterminer la valeur de m. En déduire celle de k.

c°/ Déterminer la valeur de l'instant de date t_1 inscrit sur la figure (3). Préciser si à cet instant le ressort est comprimé ou allongé.

4°/ Montrer que l'énergie mécanique E du système {(S), (R)} se conserve et déterminer sa valeur.

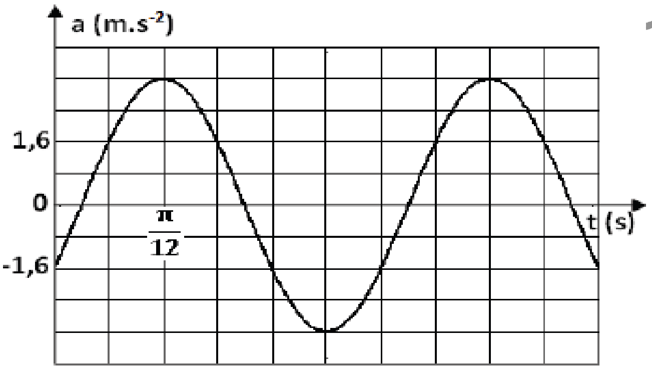


Figure (2)

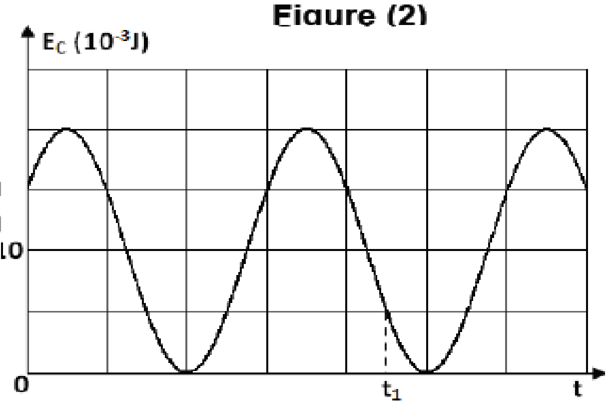


Figure (3)

EXERCICEN°9

Un solide (S) de masse m est attaché à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K=20 $N.m^{-1}$, l'autre extrémité du ressort est attachée à un point fixe. Le système S0={ (S) + ressort} est placé sur un plan horizontal (figure 1). Au repos, le centre d'inertie G du solide est au point O, origine d'un repère (O,i) horizontal. A partir de O, on écarte le solide (S) d'une distance Xm dans le sens positif et on le lâche sans vitesse.

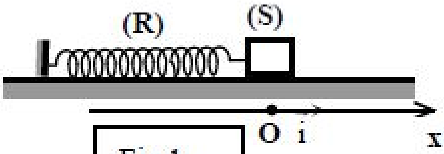


Fig 1

A- Les frottements sont négligeables.

1) a- Représenter les forces exercées sur le solide (S) en mouvement à une date t quelconque.

b- Etablir l'équation différentielle du mouvement et déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

c- On donne le graphe représentant les variations de l'accélération du solide (S) en fonction de l'élongation x (figure 2)

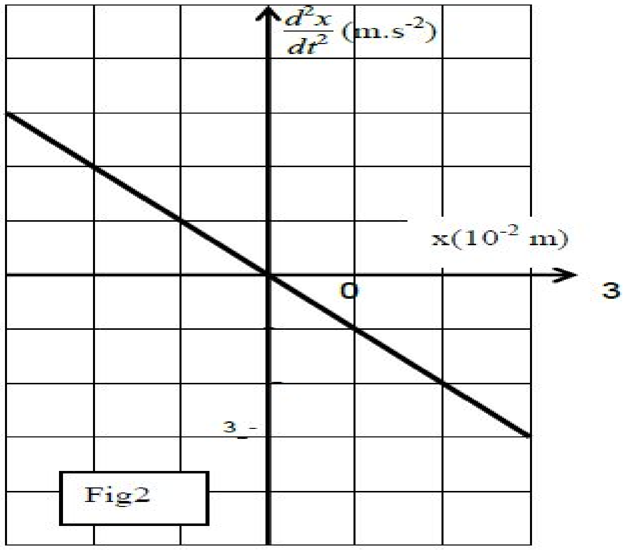


Fig2

d- Déterminer graphiquement ω_0 . Montrer que la masse du solide est m=200 g.

2) a- Au passage du solide (S) par une position d'abscisse x sa vitesse est v, donner l'expression de l'énergie mécanique totale E du système S0 en fonction de m, v, K et x.

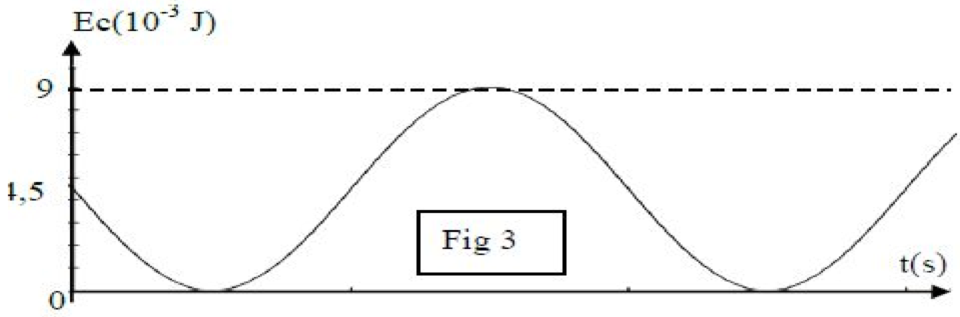
b- Montrer que l'énergie E est constante puis l'exprimer en fonction de K et Xm.

3) On donne le graphe qui représente les variations de l'énergie cinétique Ec du solide en fonction du temps (figure 3).

La loi horaire du mouvement est donnée par $x(t)=Xm\sin(\omega_0 t+\varphi_x)$

a- Montrer que l'énergie cinétique Ec s'écrit sous la forme $Ec=\frac{1}{4}KX^2m(1+\cos(2\omega_0 t+2\varphi_x)$.

b- A partir du graphe, déduire les valeurs de Xm et φ_x puis écrire, en fonction du temps, la loi horaire



EXERCICEN°10

I- Un ressort, de masse négligeable et de constante de raideur $K=10N.m^{-1}$ et placer sur un plan horizontal parfaitement lisse. A l'extrémité de ressort, est fixé un solide de masse m qui peut se déplacer sans frottement sur le plan horizontal. (Voir figure 1).

La position d'équilibre du solide est choisie comme origine du repère. On écarte le solide d'une distance $d = X_m$ à partir de sa position d'équilibre dans le sens négatif de l'axe (x'x) et on le lâche sans vitesse initiale à l'origine des dates (à t = 0s).

1-a- Etablir l'équation différentielle de cet oscillateur mécanique en fonction de x(t).

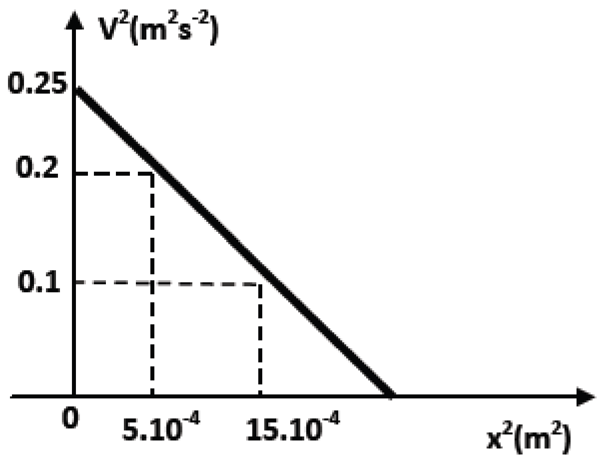
b- Vérifier que $x(t) = X_m\sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ est une solution de l'équation différentielle.

2- a- Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système en fonction de l'élongation x du solide, sa vitesse instantanée v, la masse m et la raideur de ressort K.

b- Montrer que E se conserve au cours du temps. Donner son expression en fonction du K et X_m.

c- Montrer que $v^2 = Ax^2 + B$. préciser les expressions de A et B.

3- On donne sur la figure ci-contre la courbe de variation de $v^2 = f(x^2)$.



a- Déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0.

b- Déterminer la valeur de l'amplitude d'oscillation X_m.

c- En déduire la masse m de solide (S).

d- Ecrire numériquement x(t) et déduire v(t).

II- En réalité le solide(S) est soumis à des forces de frottements dont l'équivalente est une force $f = - hv$ où h est une constante positive qui représente le coefficient d'amortissement.

On écarte le solide d'une distance $d = X_m$ à partir de sa position d'équilibre dans le sens négatif de l'axe (x'x) et on le lâche sans vitesse initiale à l'origine des dates (à t = 0s).

1- Quelle est la nature de l'oscillation obtenue ? Justifier.

2- a- Calculer les valeurs des énergies mécaniques E_0 et E_1 de l'oscillateur respectivement aux instants t=0 et t=T. Sachant que pendant une oscillation X_m diminue de10 %

b- Comparer ces deux énergies. A quoi est due cette différence.
c- A la date t= T, représenter les forces exercées sur le solide. Justifier.

EXERCICEN°11

A l'aide d'un solide (S) supposé ponctuel de masse m et d'un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K, on construit le pendule élastique de la figure-1-
Au cours de son mouvement, le solide (S) est assujetti à se déplacer sans frottement sur un rail horizontal représentant l'axe (x'x) muni du repère R(O,i).Au repos, la position

Du centre d'inertie (G) du solide S correspond à l'origine O et à chaque instant, son élongation est donnée par x(t) = O G .
De sa position de repos, on écarte le solide (S) d'une distance X_0= 3 cm et à l'origine des temps (t = 0) on lui communique un vecteur, vitesse $\vec{vo} = V_0\ \vec{i}$ de valeur algébrique $V_0 < 0$. Son centre d'inertie (G) effectue un mouvement rectiligne sinusoïdal de loi horaire $x(t) = X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

1°/ a°/ Etablir l'équation différentielle qui régit les variations au cours du temps de l'élongation x.

b°/ Montrer que la pulsation propre du mouvement de (G) peut être donnée par $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. En déduire en fonction de K et m l'expression de la fréquence propre N_0 des oscillations.

2°/ A l'aide d'un système d'acquisition approprié, on enregistre les variations au cours du temps des énergies potentielle élastique E_P et cinétique E_C. On obtient les oscillogrammes C1 et C2 de la figure-4-

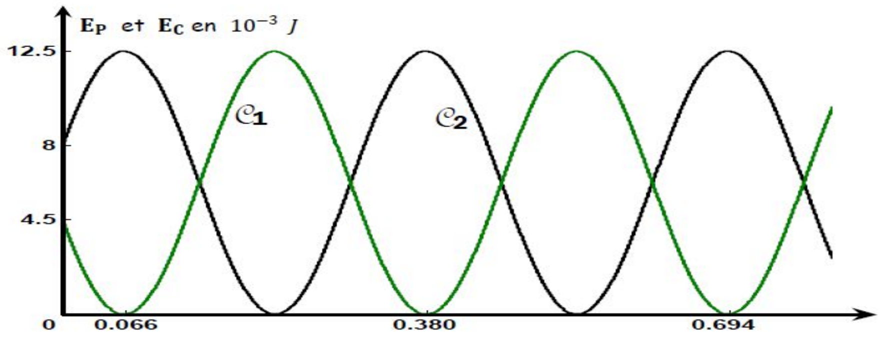


Figure-4-

a°/ Montrer que l'oscillogramme C1 correspond à E_P.

b°/ En exploitant les oscillogrammes de la figure-4- ; déterminer K, X_m et N_0.

c°/ En déduire la valeur de la masse m et celle de V_0.

3°/ En se servant des oscillogrammes de la figure-4- montrer que l'énergie mécanique E de ce pendule est conservée. En déduire sa valeur.

4°/ Déterminer la phase initiale φx et donner en fonction du temps l'expression de la vitesse v.