*Lycée **Thélepte*** *Décembre*	*Devoir de **synthèse** n°1* ***Mathématiques***	*Niveau : **3éme Maths*** *Prof :**Mhamdi Abderrazek***

……………………………………Exercice 1(3points)………………………………………

Répondre par **Vrai** ou **Faux** (aucune justification n'est demandée)

1).Si ABC est un triangle rectangle et isocèle en A (direct) alors dét $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}) = -AC^2$.

2).Si A et B deux points distincts du plan et I=A*B alors $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$ $(\forall M \in \mathcal{P})$.

3).Si f est une fonction dérivable à droite et à gauche en un réel $\boldsymbol{a}$ alors f est dérivable en $\boldsymbol{a}$.

4).Si f est une fonction impaire et dérivable en 2 et $f'(2)=1$ alors f est dérivable en (-2) et $f'(-2)=1$.

……………………………………Exercice 2(4points)………………………………………

Dans la figure ci-dessous (**page 2/3**)on a :

. La courbe (ζ_f) représente, dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.

. La courbe (ζ_f) admet trois tangentes aux points A ;B et C.

.La droite D :$y = -x + 1$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$.

.La droite D':$y = -x - 6$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de $-\infty$.

.La droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à (ζ_f).

Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :

1).a).Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f (D_f).

b).Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x$.

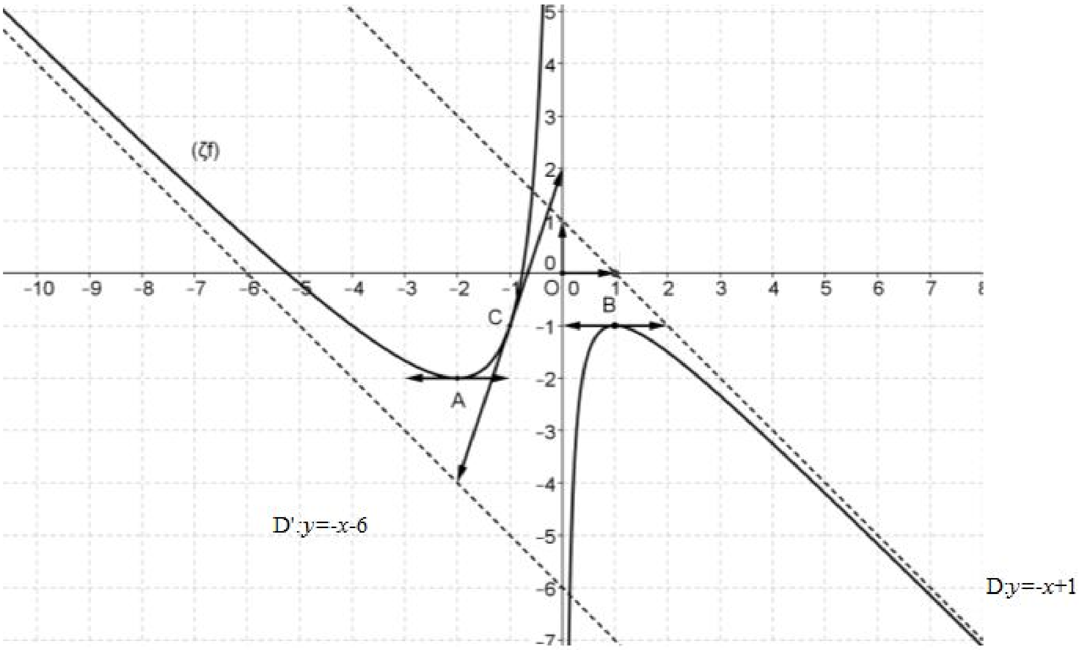
2).a).Déterminer $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(-2)$ et $f'(1)$.

b).En utilisant $f'(-1)$ donner une approximation affine de $f(-0.995)$

3).Déterminer $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{x.f(x)-1}{x+1}$.

4).Discuter suivant le paramètre réel $\boldsymbol{m}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x)+x=\boldsymbol{m}$.

www.devoirat.net 2015



Exercice 3(6points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x - \frac{3}{2} & si\ x < -1 \\ \frac{x^2-x-2}{-x+1} & si -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x^2+3} - x - 6 & si\ x > 0 \end{cases}$

et (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$) .

1). Vérifier que f est bien définie sur IR.

2).a).Calculer $\lim\limits_{-1^-} f$ *et* $\lim\limits_{-1^+} f$ et en déduire que f est continue en (-1).

b). Calculer $\lim\limits_{0^-} f$ *et* $\lim\limits_{0^+} f$ et en déduire que f est continue en 0.

c). Montrer alors que f est continue sur IR.

3). Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = -4$.Interpréter ce résultat graphiquement.

4).a).Montrer que f est dérivable en (-1).

b).Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0.

c). Interpréter ce résultat graphiquement.

5).a).Calculer $f'(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*$).

b).Déterminer le réel $x_0 \in]-1;+\infty[$ pour lequel la tangente **T** à (ζ_f) au point d'abscisse x_0 soit perpendiculaire à la droite d'équation **:D** :y=x.

www.devoirat.net 2015

....***Exercice 4(7points)***...

Soit A(x)= cos(2x)$-\sqrt{3}$ sin(2x) ($\forall x \in$ IR).

1).a).Montrer que A($x+\frac{\pi}{2}$)+ A(x)=0.

b).Calculer A($\frac{\pi}{8}$) en déduire A($\frac{5\pi}{8}$).

2).a).Montrer que A(x)= 2cos(2x + $\frac{\pi}{3}$) ($\forall x \in \mathbb{R}$).

b).En déduire que A(x)= $-$2sin(2x - $\frac{\pi}{6}$) ($\forall x \in \mathbb{R}$).

c).Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans]-π; π] l'équation :A(x) = 0.

3).Soit $h(x)= \frac{1-\cos(2x-\frac{\pi}{6})}{A(x)}$

a).Déterminer l'ensemble de définition de h .

b).Montrer que $h(x)= \frac{-1}{2}\tan(x-\frac{\pi}{12})$ ($\forall x \in D_h$).

c).Calculer $h(0)$.En déduire que $tan\,(\frac{\pi}{12}) = 2-\sqrt{3}$ puis calculer $cos(\frac{\pi}{12})$.

Bon travail

www.devoirat.net 2015

Lycée ***Thélepte*** Décembre ***2015***	*Correction du devoir* *de **synthèse** n°1*	*Niveau : **3éme Maths*** *Prof :**Mhamdi Abderrazek***

@@@ Mathématiques @@@

Exercice 1……………………………………………………………………………

1	2	3	4
Vrai	**Faux**	**Faux**	**Vrai**

Exercice 2……………………………………………………………………………

1). ***a***). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

b). $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=1$et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=-6$.

2). ***a***).Déterminer $f(-1)=-1$; $f'(-1)=\frac{2-(-1)}{0-(-1)}=3$; $f'(-2)=0$ et $f'(1)=0$.

b). $f(-0{,}995)=f(-1+0{,}005)\approx 0.005.\ f'(-1)+f(-1)\approx -0{,}985$.

3). $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x.f(x)-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$ $=g'(1)=1.f(-1)+(-1).\ f'(-1)=(-4)$ (avec $g(x)=x\ .\ f(x)$).

4).Soit **N** le nombre de solutions de l'équation $f(x)+x=\boldsymbol{m}$ sig $f(x)=-x+\boldsymbol{m}$ on a :

m	$-\infty$		**-6**		**1**		$+\infty$
N		**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	

www.devoirat.net 2015

Exercice 3.

1).La fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x - \frac{3}{2}$ est définie sur IR (fonction polynôme) en particulier sur $]-\infty; -1[$

.La fonction $x \longmapsto \frac{x^2-x-2}{-x+1}$ est définie sur IR\{1} (fonction rationnelle) en particulier sur $[-1; 0]$

.La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2 + 4} - x - 4$ est définie sur IR **(**la fonction $x \longmapsto x^2 + 4$est définie et positive sur IR et la fonction $x \longmapsto -x - 4$ est définie sur IR(polynôme) **)**en particulier sur $]0 ;+\infty[$

Donc f est bien définie sur $]-\infty; -1[\cup [-1; 0] \cup]0 ;+\infty[$=IR.

2). ***a***). $\lim\limits_{-1^-} f = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$

. $\lim\limits_{-1^+} f = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2-x-2}{-x+1} = 0$

.On a $f(-1)= \frac{(1)^2-(-1)-2}{-(-1)+1} = 0 = \lim\limits_{-1^-} f = \lim\limits_{-1^+} f$ sig f est continue en (-1).

b).). $\lim\limits_{-0^-} f = \lim\limits_{x \to -0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -0^-} \frac{x^2-x-2}{-x+1} = (-2)$.

. $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x^2 + 3} - x - 6 = (-2)$.

.On a $f(0)= \frac{(0)^2-(0)-2}{-(0)+1} = (-2) = \lim\limits_{0^-} f = \lim\limits_{0^+} f$ sig f est continue en 0.

c). La fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x - \frac{3}{2}$ est continue sur IR (fonction polynôme) en particulier sur $]-\infty; -1[$

.La fonction $x \longmapsto \frac{x^2-x-2}{-x+1}$ est continue sur IR\{1} (fonction rationnelle) en particulier sur $]-1; 0[$

.La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2 + 4} - x - 4$ est continue sur IR **(car** la fonction $x \longmapsto x^2 + 4$est continue et positive sur IR et la fonction $x \longmapsto -x - 4$ est continue sur IR(polynôme) **)** en particulier sur $]0 ;+\infty[$

De plus f est continue en (-1) et en 0 donc f est continue sur IR.

www.devoirat.net 2015

3). $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4} - 4 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4}-(x+4))(\sqrt{x^2+4}+(x+4))}{\sqrt{x^2+4}+(x+4))} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4}-(x+4))(\sqrt{x^2+4}+(x+4))}{\sqrt{x^2+4}+(x+4))}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4})^2-(x+4)^2}{\sqrt{x^2+4}+(x+4))} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+4-(x^2+8x+16)}{\sqrt{x^2+4}+(x+4))} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-8x-12}{\sqrt{x^2+4}+(x+4))} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(-8-\frac{12}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{4}{x}+4}+(1+\frac{4}{x}))} = \frac{-8}{2} = -4.$

Interprétation graphique:la droite d'équation :y=-4 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$.

4).a).**Dérivabilité de *f* à gauche en (-1)** :

. $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{\frac{1}{2}x^3+x^2-x-\frac{3}{2}-0}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{\frac{1}{2}(x+1)(x^2+x-3)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{1}{2}(x^2+x-3) = \frac{-3}{2}.$

Signifie *f* est dérivable à gauche en (-1) et on a $\boldsymbol{f'_g(-1)=\frac{-3}{2}}$.

Dérivabilité de *f* à droite en (-1) :

. $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{\frac{x^2-x-2}{-x+1}-0}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(-x+1)} = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{(x-2)}{(-x+1)} = \frac{-3}{2}$

Signifie *f* est dérivable à droite en (-1) et on a $\boldsymbol{f'_d(-1)=\frac{-3}{2}}$.

Conclusion : On a $\boldsymbol{f'_d(-1)=f'_d(-1)=\frac{-3}{2}}$ signifie *f* est dérivable en (-1) et on a $\boldsymbol{f'(-1)=\frac{-3}{2}}$.

b). **Dérivabilité de *f* à gauche en 0** :

. $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\frac{x^2-x-2}{-x+1}-(-2)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\frac{x^2-x-2+2(-x+1)}{-x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x^2-x-2-2x+2}{x(-x+1)} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x^2-3x}{x(-x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x(x-3)}{x(-x+1)} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x-3}{-x+1} = -3.$

Signifie *f* est dérivable à gauche en (0) et on a $\boldsymbol{f'_g(0)=-3}$.

Dérivabilité de *f* à droite en 0 :

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^2+4}-x-4-(-2)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^2+4}-x-2}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{(\sqrt{x^2+4}-(x+2))(\sqrt{x^2+4}+(x+2))}{x(\sqrt{x^2+4}+(x+2))} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^2+4}^2-(x+2)^2}{x(\sqrt{x^2+4}+(x+2))} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^2+4-x^2-4x-4}{x(\sqrt{x^2+4}+(x+2))}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{-4x}{x(\sqrt{x^2+4}+(x+2))} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{-4}{\sqrt{x^2+4}+(x+2)} = -1.$

Signifie *f* est dérivable à droite en (0) et on a $\boldsymbol{f'_d(0)=-1}$.

c).La courbe (ζ_f) admet au point d'abscisse (0) deux demi-tangentes l'une à gauche de pente $f'_g(0)=-3$ et l'autre à droite de pente $f'_d(0)=-1$.

www.devoirat.net 2015

5).a). Si $x<-1$ on a $f'(x) = (\frac{1}{2}x^3 + x^2 - x - \frac{3}{2})' = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$

Si $x=-1$ on a $f'(x) = f'(-1) = \frac{-3}{2}$.

Si $-1 < x < 0$ on a $f'(x) = (\frac{x^2-x-2}{-x+1})' = \frac{(2x-1)(-x+1)-(x^2-x-2)(-1)}{(-x+1)^2} = \frac{(-2x^2+2x+x-1)+(x^2-x-2)}{(-x+1)^2}$

$= \frac{-x^2+2x-3}{(-x+1)^2}$

Si $x > 0$ on a $f'(x) = (\sqrt{x^2+4} - x - 4)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$.

<u>**Conclusion**</u> : $f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 & si\ x \prec -1 \\ -\frac{3}{2} & si\ x = -1 \\ \frac{-x^2+2x-3}{(-x+1)^2} & si\ -1 \prec x \prec 0 \\ \frac{x}{\sqrt{(x^2+4)}} - 1 & si\ x \succ 0 \end{cases}$

b). On a **T** :$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ et **D** :$y=x$.**T**$\perp$**D** Signifie $1.f'(x_0)=-1$

signifie $\frac{3}{2}x_0^2 + 2x_0 - 1 = -1$ signifie $\frac{3}{2}x_0^2 + 2x_0 = 0$ $x_0=0 \notin]-1;+\infty[$ ou $x_0=\frac{-4}{3} \in]-1;+\infty[$

<u>**Conclusion :**</u> $\boldsymbol{x_0=\frac{-4}{3}}$.

Exercice 4...

1).a). $A(x+\frac{\pi}{2}) + A(x) = \cos(2(x+\frac{\pi}{2})) - \sqrt{3}\sin(2(x+\frac{\pi}{2})) + \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x)$

$= \cos(2x+\pi) - \sqrt{3}\sin(2x+\pi) + \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x)$

$= -\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) + \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 0$

b). $A(\frac{\pi}{8}) = \cos(2.\frac{\pi}{8}) - \sqrt{3}\sin(2.\frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{4}) - \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}$.

$A(\frac{5\pi}{8}) = A(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}) = -A(\frac{\pi}{8}) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$.

2).a). $2\cos(2x+\frac{\pi}{3}) = 2(\cos(2x).\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(2x).\sin(\frac{\pi}{3})) = 2(\frac{1}{2}.\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(2x))$

$= \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = A(x)$.

b). $A(x) = 2\cos(2x+\frac{\pi}{3}) = 2\sin(\frac{\pi}{2} - (2x+\frac{\pi}{3})) = 2\sin(-(2x-\frac{\pi}{6})) = \boldsymbol{-2\sin(2x-\frac{\pi}{6})}$.

www.devoirat.net 2015

c). $A(x) = 0$ signifie $-2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 0$ signifie $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) signifie $2x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

signifie $x = \frac{\pi}{12} + k.\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) d'où $S_{\mathbb{R}} = \{ \frac{\pi}{12} + k.\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)$\}$

donc $S_{]-\pi;\pi]} = \{\frac{-11\pi}{12} ; \frac{-5\pi}{12} ; \frac{\pi}{12} ; \frac{7\pi}{12}\}$.

3).a). $D_h = \{ x \in IR ; A(x) \neq 0\} = IR \backslash \{ \frac{\pi}{12} + k.\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)$\}$.

b). $h(x) = \frac{1-\cos(2x-\frac{\pi}{6})}{A(x)} = h(x) = \frac{1-\cos(2x-\frac{\pi}{6})}{-2\sin(2x-\frac{\pi}{6})} = \frac{1-\cos(2(x-\frac{\pi}{12}))}{-2\sin(2(x-\frac{\pi}{12}))} = \frac{2\cos^2(x-\frac{\pi}{12})}{-2.2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right).\cos(x-\frac{\pi}{12})}$

$= \frac{\cos(x-\frac{\pi}{12})}{-2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)} = \boldsymbol{\frac{-1}{2}\tan(x - \frac{\pi}{12})}$ ($\forall x \in D_h$).

c). $h(0) = \frac{-1}{2}\tan(0 - \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$h(0) = \frac{1-\cos(0-\frac{\pi}{6})}{A(0)} = \frac{1-\cos(-\frac{\pi}{6})}{\cos(0)-\sqrt{3}\sin(0)} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-0} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ signifie $\tan(\frac{\pi}{12}) = 2-\sqrt{3}$.

On a $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$ signifie $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$ donc $\cos^2(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{1+\tan^2(\frac{\pi}{12})}$

$= \frac{1}{1+(2-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{1+2^2-4\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} = \frac{1}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ donc $\cos(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Ou $\cos(\frac{\pi}{12}) = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ or $\frac{\pi}{12} \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ alors $\cos(\frac{\pi}{12}) \geq 0$ donc $\boldsymbol{\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$.

www.devoirat.net 2015