

Exercice 1 (3 points)

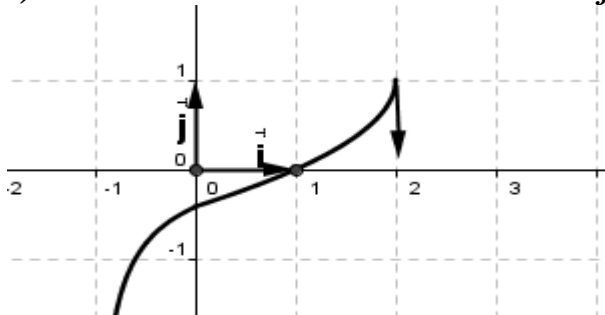
Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse proposée est exacte.

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie :

1) Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} tel que $g(1)=2$ alors :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g\left(\frac{x-1}{x}\right) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$

2) La courbe ci dessous est celle d'une fonction f continue sur $]-1, 2]$ alors :



a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-1}{x-2} = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-1}{x-2} = -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-1}{x-2} = 2$

3) Soit f une fonction définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ alors sa fonction réciproque sur $[0 ; 1]$ est :

a) $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{2y - y^2}$ b) $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1 + y^2}$ c) $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1 - y^2}$

Exercice 2 (5 points)

Soit dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - (1+3i)z - 2+i = 0$

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)

2) On pose $f(z) = z^3 - (2+3i)z^2 + (4i-1)z + 2-i$

- a) Montrer que l'équation $f(z)=0$ admet dans \mathbb{C} une solution réelle que l'on déterminera
 b) Déterminer les complexes b et c tels que $f(z) = (z-1)(z^2 + bz + c)$ quelque soit $z \in \mathbb{C}$
 c) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$

3) Soit dans le plans muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

les points A ; B et C d'affixes respectives $1+2i$; i et 1 .

- a) placer les points A, B et C puis déterminer la nature du triangle ABC.
 b) Déterminer l'aire du trapèze OBAC.

Exercice 3 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $I =]-\infty, 0[$ par $f(x) = x + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan munie d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) a. Justifier que f est dérivable sur I .

b. Montrer que $f'(x) = 1 + \frac{1}{2x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$ pour tout x appartient à I .

2) a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer une équation de l'asymptote Δ de C_f au voisinage de $-\infty$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur I .

4) a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans sur $]-2); (-1)[$ une unique solution α

b. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

c. En déduire le signe de f .

5) Montrer que $\alpha = \frac{1}{1-\alpha^2}$.

6) a) Montrer que f est une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $f^{-1}(0)$ et montrer que f^{-1} est dérivable en 0 .

c) Montrer que $(f^{-1})'(0) = 1 - \frac{1}{2\alpha^3}$.

Exercice 4 (6 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ et $C(0,1,1)$.

1. Montrer que les points $A; B$ et C ne sont pas alignés

2. Donner une équation cartésienne de (ABC)

3. Vérifier que $O \notin (ABC)$ et que $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur de (ABC) .

4. Soit P le plan d'équation : $x - y + \sqrt{2}z + 2 - \sqrt{2} = 0$.

a. Montrer que (ABC) et P sont sécants suivant une droite Δ

b. Donner une représentation cartésienne et paramétrique de la droite Δ .

c. soit $\Delta_1 \begin{cases} x = 2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\beta \\ y = 1 - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\beta \\ z = 0 \end{cases}$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ une représentation paramétrique de Δ_1

Montrer que $\Delta \perp \Delta_1$.