Hamda Abbes

Devoir de maison N:1

4ème Mathématiques

LYCEE DE MATEUR 2015-2016

Exrcice N:1

1. On considère la fonction $\varphi(x)$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi(x)=\tan x$.
   (a) Montrer que φ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervale J que l'on déterminera .
   (b) Note φ^{-1} la fonction résiproque de φ ,Montrer que φ^{-1} dérivable sur J et que $(\varphi^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty;2[$ par : $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right)$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, interpréter graphiquement .
   (b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]-\infty;2[$.
   (c) Tracer C_f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ .On donne $f(0)\approx 0,4$.
3. (a) Montrer que f est une bijection de $]-\infty;2[$ sur $]0;1[$.
   (b) Déterminer f^{-1} pour tout $x\in]0;1[$,et tracer $C_{f^{-1}}$ sur le mème repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.
4. (a) Montrer qu'il existe un réel $k\in]0;1[$, tel que $0<f'(x)<k$, pour tout $x\in]0;1[$.
   (b) En déduire que la fonction $g(x)=f(x)-x$ est décroissante sur $]0;1[$.
   (c) Montrer que léquation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]0;1[$.
5. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{1}{6}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
   (a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<1$.
   (b) Montrer que : $|u_{n+1}-\alpha|<k\,|u_n-\alpha|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (c) En déduire que (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\alpha$.

Exrcice N:2

ABC est un triangle isocèle rectangle en A et direct.
On désigne par $r_A=r(A,\frac{\pi}{2})$; $r_B=r(B,\frac{\pi}{4})$ et $r_C=r(C,\frac{\pi}{4})$.

1. Soit $A'=r_C(A)$
   (a) Montrer que A' appartient à la droite (BC).
   (b) En déduire l'image de la droite (AC) par la rotation r_C.
   (c) Donner l'image de (BC) par r_B et celle de (AB) par r_A.

2. On pose $f = r_A \circ r_B \circ r_C$

   (a) Montrer que f est une rotation .

   (b) Soit M le centre de f. Montrer que $M \in (AC)$.

3. Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC et $J = r_A(I)$

   (a) Caractériser $r_B \circ r_C$.

   (b) Montrer que $M = I * J$.

4. Soit $N = r_A^{-1}(M)$

   (a) Montrer qu'il existe un seul déplacement g telle que $g(M) = N$ et $g(J) = I$.

   (b) Caractériser g.

   (c) Déterminer l'image par g de (AC).

Exrcice N:3

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère les points A , M et M' d'affi xes respectives : 1 , z et z^3 .

1. (a) Montrer que les points A , M et M 'sont alignés si et seulement si $(1 + z + z^2)$ est un nombre réel.

   (b) Déterminer l'ensemble $\Gamma = \{M(z) \in P \ /A\ , M$ et M' sont alignés$\}$.

   (c) On prend $z = -\dfrac{1}{2} + iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. Construire le point M' d'affixe z^3 .

2. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :$z^4 = 1$.

   (b) Soit N le point d'affixe $z_N = -(z^2 + 2)$

Déterminer les nombres complexes z pour que le quadrilatère $AMNM$ soit un parallélogramme

Exrcice N:4

On considère la fonction $f(x) = \tan x$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. $(f^{-1}(x)$ note $Arc\tan(x))$

2. Soit $g(x) = xf^{-1}(x)$. Déterminer l'ensemble D_g .

3. Montrer que C_g admet une asymptôte oblique en $+\infty$.