❖ Fonction dérivable en a :

- Soit f une fonction définie sur I contenant un réel a.

  f est dérivable en a **ssi** il existe un réel L tel que $\lim\limits_{x\mapsto a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$, $f'(a)=L$.

- f est dérivable en a **ssi** f est dérivable à gauche et à droite en a et $f_g'(a)=f_d'(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et C_f sa courbe dans un repère.

Dérivabilité en a	**Interprétation graphique**
f est dérivable en a	C_f admet une tangente T d'équation $T: y=f'(a)(x-a)+f(a)$ au point A(a,f(a)) f'(a) est appelé coefficient directeur de T $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(a)\end{pmatrix}$ vecteur directeur de T.
f n'est pas dérivable en a tel que $f_g'(a)\neq f_d'(a)$	C_f admet deux demi tangentes au point A(af(a)) d'équations :$T_g\begin{cases}x\le a\\ y=f_g'(a)(x-a)+f(a)\end{cases}$ $T_d\begin{cases}x\ge a\\ y=f_d'(a)(x-a)+f(a)\end{cases}$
f n'est pas dérivable en a tel que : $\lim\limits_{x\mapsto a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\mapsto a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	C_f admet deux demi tangente verticale au point A(a,f(a)) dirigés vers le haut.
f n'est pas dérivable en a tel que : $\lim\limits_{x\mapsto a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\mapsto a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	C_f admet deux demi tangente verticale au point A(a,f(a)) dirigés vers le bas.

❖ Accroissement finis :

- Théorème de Rolle

  Si f est une fonction continue sur [a,b] dérivable sur]a,b[telle que f(a) = f(b) alors il existe au moins $c\in]a,b[$ tel que f'(c) = 0.

- Théorème d'accroissement finis :

  Si f est une fonction continue sur [a,b] dérivable sur]a,b[telle que f(a) = f(b) alors il existe au moins $c\in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

- Sens de variation :Soit f une fonction dérivable sur I.

✓ f est strictement croissante sur I ssi f'(x) > 0 pour tout x de I.

✓ f est strictement décroissante sur I ssi f'(x) < 0 pour tout x de I.

✓ f est constante sur I ssi f'(x) = 0 pour tout x de I.

Remarque :

✓ si $f'(x)\ge 0$ pour tout x de I et il n'existe pas un intervalle $J\subset I$ tel que f'(x)=0 alors f est strictement croissante sur I.

✓ $f'(x)\le 0$ pour tout x de I et il n'existe pas un intervalle $J\subset I$ tel que f'(x)=0 alors f est strictement décroissante sur I.

- **Inégalité des accroissements finis :**

- Soit f est une fonction continue sur [a,b] dérivable sur I, s'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.
- Soit f une fonction dérivable sur I,s'il existe $k \in IR^*$ tel que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq k$ alors pour tout a et b de I on a: $|f(b)-f(a)| \leq k|b-a|$.

- **Fonction dérivée :**

- Dérivé d'une fonction composée

  Soit f une fonction dérivable sur I, g est dérivable sur J et $f(I) \subset J$ alors gof est dérivable sur I et pour tout x de I , on a : **(gof)'(x)=g'(f(x).f'(x).**
- Dérivées usuelles :

Fonction	**Sa dérivée**	**Intervalle**
a	0	IR
x^n $(n \in IN^*)$	nx^{n-1}	IR
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in IN^*)$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	IR^*
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	IR
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	IR
$\tan(ax+b)$	$a(1+\tan^2(ax+b))$	$ax+b \neq \frac{\pi}{2}+2k\pi$
f + g	f' + g'	
αf $\alpha \in IR^*$	$\alpha f'$	
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	
$\frac{1}{f}, \left(\frac{a}{f}; a \text{ est une constante}\right)$	$\frac{-f'}{f^2}, \left(\frac{-af'}{f^2}\right)$	f est non nul
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	g est non nul
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	f strictement positif
$f^n\left(n \in Z^*\right)$	$nf'f^{n-1}$	Si n<0 , f est non nul

- **Point d'inflexion :**

  - Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, Si f ' s'annule en a en changeant de signe alors le point A(a,f(a)) est un **point d'inflexion** de la courbe de f.

- **Théorème de la bijection :**

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I alors on a :

1) f réalise une bijection de I sur f (I).
2) La fonction réciproque f^{-1} de f est strictement monotone sur f(I) et elle a le même sens de variation que f.
3) Pour tout x de I et pour tout y de f (I) : y = f (x) équivaut à $x = f^{-1}(y)$.
4) Si de plus f continue sur I alors f^{-1} est continue sur f (I).

5) Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$.

6) Si f est dérivable sur I et f ‘ ne s’annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur f (I) et on a pour tout x de f (I) $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

❖ <u>Comment réagir aux questions d’analyse</u>

Questions	**Comment réagir**
Etudier la dérivabilité de f en x_0	On cherche $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Interpréter graphiquement le nombre dérivé	Dire si la courbe admet une tangente ou demi-tangente.
Ecrire l’équation de la tangente à C_f au point d’abscisse x_0.	$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Montrer que **f o g** est dérivable sur I puis déterminer (fog) ‘ (x).	*g dérivable sur I. * f dérivable sur J. * $g(I) \subset J$ ***(fog)’(x)=f’(g(x).g’(x).**
Montrer que pour tout a et b appartient à l’intervalle I on a : $\lvert f(b) - f(a) \rvert \leq k \lvert b - a \rvert$	On utilise le corollaire de théorème des inégalités accroissement finis - f est dérivable sur I. - $\lvert f'(x) \rvert \leq k$ pour tout x de I. - a et b appartient à l’intervalle I.
Montrer que pour tout a et b appartient à l’intervalle I on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$	On utilise le théorème des inégalités accroissement finis : - f est continue sur [a,b] - f dérivable sur]a,b[- $m \leq f'(x) \leq M$
Montrer que C_f admet un point d’inflexion au point A (x_0, f(x_0))	Calculer f ’’(x) et voir si f ’’ s’annule et change de signe en x_0.Graphiquement la courbe de f traverse la tangente au point A.
Montrer que f est une bijection de I sur f(I)	f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I donc f réalise une bijection de I sur f (I).
Expliciter f^{-1} (x) pour tout x de f (I).	f^{-1} (x) = y (x $\in$ f(I)) $\Leftrightarrow$ f(y)=x (y $\in$ I)
Dresser le tableau de variation de f^{-1} sur f(I)	f^{-1} a le même sens de variation que f.
Montrer que f^{-1} est dérivable sur f(I)	-f dérivable sur I . - f ‘(x) $\neq 0$ pour tout x de I.
Expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout x de f (I)	$\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$