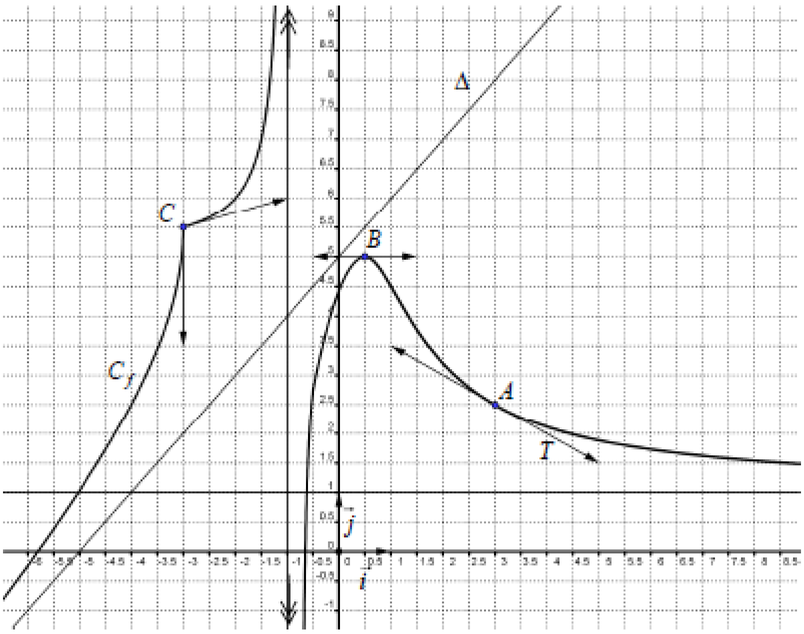
3ème Maths : M2
Durée : 2heures

DEVOIR DE SYNTHES N1

Date : le 04/ 12 / 2014
Coefficient : 4
k.f

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée Cf dans un repère orthonormé
(O,i,j) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ On sait que :

– La droite Δ d'équation $y = x + 5$ est asymptote à la courbe Cf en $-\infty$.
– La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe Cf .
– La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe Cf en .
– La droite T est la tangente à Cf au point A.
– La courbe Cf admet une tangente horizontale au point B et deux demi tangentes au point C.



À partir du graphique et des renseignements fournis :

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-x-5]$. | 1.25

2) a – Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(3)$. | 1

b – Donner une approximation affine du réel $f(3{,}004)$ | 0.5

EXERCICE N :2 *(4.5 points)*

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = \sqrt{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. On pose J le milieu de [BC] .

1) a) Faite une figure . (Unité : 2 cm)

b) Montrer que $BC = \sqrt{10}$.

2) On donne $(\Gamma) = \{ M \in P$ tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 4 \}$.

a) Montrer que $A \in (\Gamma)$.

b) Montrer que (Γ) est le cercle de centre J et de rayon $\sqrt{\frac{13}{2}}$.

c) Construire (Γ) .

3) On donne $\Delta = \{ M \in P$ tels que : $MB^2 - MC^2 = 2\sqrt{65} \}$. [BC) coupe (Γ) en un point H .

a) Montrer que $H \in \Delta$.

b) Montrer que Δ est une droite tangente à (Γ) en H .

EXERCICE 3 (05 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

1) Questions de cours

   Un point M a pour coordonnées cartésiennes (x; y) dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et pour coordonnées polaires $[r,\theta]$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OI})$.

   a. Calculer $\cos(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ et $\sin(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

   b. Démontrer que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = r\cos(\theta)$; $y = r\sin(\theta)$.

2) On considère l'ensemble E des points M du plan dont les coordonnées polaires $[r,\theta]$ vérifient $r = 2\sin(\theta)$ avec $\theta \in]0;\pi[$.

   a. Montrer qu'un point M de E a pour coordonnées cartésiennes $(\sin 2\theta; 1 - \cos 2\theta)$.

   b. En déduire que E est contenu dans un cercle que l'on caractérisera.

3) On note (C) le cercle de centre I(0;1) et de rayon 1.

   N est un point de (C), distinct de O, de coordonnées cartésiennes (x; y) et de coordonnées polaires $[r,\theta]$.

   a. Justifier que l'on peut choisir $\theta \in]0;\pi[$.

   b. Démontrer que $r(r - 2\sin(\theta)) = 0$.

   c. En déduire que N est un point de E.

4) Déterminer l'ensemble E.