LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: SALAH HANNACHI « 4^{EME}INFORMATIQUE »	2015/2016 **DEVOIR DE CONTRÔLE N1** *MATHEMATIQUES*	2 heures

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 : (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Le module du nombre complexe $\frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$ est égale à :

a) $\sqrt{3}$ **b)** 2 **c)** 1

2) Soit une suite (u_n) définie sur IN et vérifiant $\frac{n-1}{n^2+4} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+4}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(n.u_n) =$:

a) 0 **b)** 1 **c)** $+\infty$

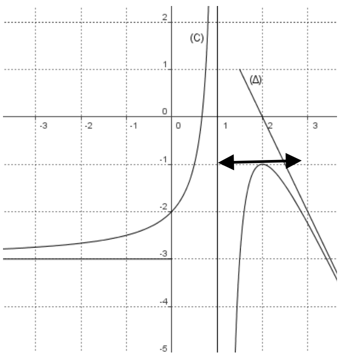
3) La limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}$ est égale à :

a) 0 **b)** $+\infty$ **c)** 1

4) Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{u},\vec{v})$, On donne les points A(1) et B(i). L'ensemble des points M(z) de P tels que $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| =1$ est :

a) La médiatrice de [AB] **b)** la droite (AB) **c)** Le cercle de diamètre [AB]

EXERCICE 2 : (4 points)



Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur IR\{1}. La droite (Δ) : y= $-2x+4$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. Les droites d'équations x=1 et y= -3 sont des asymptotes à (C).

1) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+2x-4]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+2x-4]$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Soit α l'unique solution dans D_f de l'équation $f(x)= -2x+4$

En tenant compte de la position de (C) par rapport à (Δ), dresser le tableau de signe de l'expression : $g(x) = f(x)+2x-4$ dans D_f .

EXERCICE 3 : (6 points)

1) a) Vérifier que $(1+2i)^2 = -3+4i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + z + 1 - i = 0$

2) Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$, $z_B = i$ et $z_C = -1 - i$

a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

c) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un carré.

d) Déterminer l'affixe du point H centre du carré ABCD .

e) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M(z) du plan P tels que $|2\bar{z} - 1 - i| = \sqrt{10}$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au carré ABCD.

EXERCICE 4 : (7points)

On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par : $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$

1) Montrer que $u_n > 1$ pour tout $n \in IN^*$

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite ℓ.

3) Soit $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ pour tout $n \in IN^*$ et on pose : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

b) Exprimer v_n puis u_n à l'aide de n.

c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) Montrer que $S_n = \frac{1}{4}[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n]$

e) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

BONNE CHANCE

CORRECTION DU DEVOIR
DE CONTROLE N°1

<u>EXERCICE 1 :</u> (3 points)

1) Le module du nombre complexe $\frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}}$ est égale à : **c)** 1

2) Soit une suite (u_n) définie sur IN et vérifiant $\frac{n-1}{n^2+4} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+4}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(n.u_n) =$: **b)** 1

3) La limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}$ est égale à : **a)** 0

4) Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé, On donne les points A(1) et B(i). L'ensemble des points M(z) de P tels que $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$ est : **a)** La médiatrice de [AB]

<u>EXERCICE 2 :</u> (4 points)

1) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (-3)^+$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)+3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + 2x - 4] = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + 2x - 4] = -\infty$

2)

x	-∞		1		2		+∞
f	-3	↗	+∞ ‖ -∞	↗	-1	↘	-∞

3)

x	-∞		α		1		+∞
$g(x)$		−	0	+	‖	−	

<u>EXERCICE 3 :</u> (6 points)

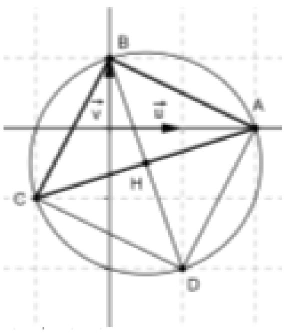
1) a) $(1 + 2i)^2 = 1 + 4i + (2i)^2 = -3 + 4i$

b) (E) : $z^2 + z + 1 - i = 0$; (a=1 , b=1 , c=$1-i$)

$\Delta = b^2 - 4ac = -3 + 4i$ alors $\Delta = (1 + 2i)^2$. Une racine carrée de Δ est $\delta = 1 + 2i$

Alors $z' = \frac{-b-\delta}{2a} = -1 - i$ et $z'' = \frac{-b+\delta}{2a} = i$ Donc $S_{\mathbb{C}} = \{-1 - i, i\}$

2) a)



b) $(z_B - z_A)(\overline{z_B - z_C}) = (i - 2)(1 - 2i) = 5\,i$ est imaginaire pur alors $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$

$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{5}$ et $BC = |z_C - z_B| = \sqrt{5}$ alors AB=BC

Et par la suite le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

c) Le quadrilatère ABCD est un carré alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ cela signifie que $z_B - z_A = z_C - z_D$

cela signifie que $z_D = z_C + z_A - z_B$

$= 1 - 2i$

d)H est le milieu de [AC] signifie que $z_H = \frac{z_C + z_A}{2} = \frac{1-i}{2}$

e) $\mathcal{C} = \{M(z) \in P \text{ tels que } |2\bar{z} - 1 - i| = \sqrt{10}\}$

$|2\bar{z} - 1 - i| = \sqrt{10}$ signifie $\left|\bar{z} - \frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

signifie $\left|z - \frac{1-i}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

signifie $HM = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre H et de rayon R= $\frac{1}{2}\sqrt{10}$

On remarque que AC = $|z_C - z_A| = \sqrt{10}$ alors AC =2R

Et comme H est le milieu de [AC] alors [AC] est un diamètre de $\mathcal{C}$.

D'où $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au carré ABCD.

EXERCICE 4 : (7points)

1) Montrons par récurrence que $u_n > 1$ pour tout $n \in IN^*$:

* Pour n=1 : $u_1 = 2 > 1$

* On suppose que pour tout $n \in IN^*$ on a : $u_n > 1$. Montrons que $u_{n+1} > 1$

$u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n+4} > 0$ alors $u_{n+1} > 1$. D'où $u_n > 1$ pour tout $n \in IN^*$.

2) a) $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+4} - u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n+3)}{u_n+4} < 0$. Alors la suite (u_n) est décroissante.

b) * La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Alors la suite (u_n) est convergente

* Calculons sa limite ℓ :

On a : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+4} \\ (u_n) \text{ est convergente vers } \ell \geq 1 \\ f \text{ est continue sur IR} \setminus \{-4\} \text{ alors en particulier en } \ell \end{cases}$ Alors $f(\ell) = \ell$

Cela signifie que $\frac{-(\ell-1)(\ell+3)}{\ell+4} = 0$ signifie que $\ell = 1$ ou $\ell = -3$. Or $\ell \geq 1$ alors $\ell = 1$

3) a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{u_n - 1}{5(u_n+3)} = \frac{1}{5} v_n$ alors (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

b) * $v_n = v_1 . q^{n-1}$ où $v_1 = \frac{u_1-1}{u_1+3} = \frac{1}{5}$ alors $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

* $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n+3}$ équivaut à $u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1$

$v_n \neq 1$ car $u_n - 1 \neq u_n + 3$ alors $u_n = \frac{3v_n+1}{1-v_n} = \frac{3\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n} = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ $(-1 < \frac{1}{5} < 1)$

d) $S_n = v_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{4}$