| L. Regueb | Mathématiques | Classe : $4^{ème}M$ |
|---|---|---|
| Prof : Salhi Noureddine | Devoir de Contrôle №1 | Le:14/11/2015 D:2h |

## Exercice1(7pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$ .

a) Vérifier que $a=1+(2-\sqrt{3})i$ est solution de (E) .

b) Déduire b l'autre solution de (E) .

2)a) Montrer que : $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

b) Ecrire le nombre a sous la forme exponentielle .

3) On considère les points A , B et C d'affixes respectifs a , b et $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$ .

On désigne par $(\Gamma)$ le cercle de diamètre $[AB]$ .

a) Déterminer $\omega$ l'affixe du point $\Omega$ centre du cercle $(\Gamma)$ .

b) Monter que les points O et C appartiennent au cercle $(\Gamma)$ .

c) Montrer que le nombre complexe $\frac{c-b}{c-a}$ est imaginaire pur .

## Exercice2(6pts)

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{1+u_n^2}{2u_n} \quad ; n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $u_n\geq 1$ .

2)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$ .

b) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite .

3) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$ .

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $u_n-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

c) Retrouver la limite de la suite $(u_n)$ .

4) Soit $(S_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}u_k$ .

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ , $n\leq S_n\leq n+1-\frac{1}{2^n}$ .

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}S_n$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$ .

## *Exercice3(7pts)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1 & si\ x < 0 \\ f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x} & si\ \ x > 0 \end{cases}$

On désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .

2)a) Montrer que la droite $\Delta: y = -(x+1)$ est une asymptote à $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$ .

b) Monter que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ et interpréter graphiquement ce résultat .

c) *Calculer* $(f \circ f)(\pi)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \circ f)(x)$ .

3) Montrer que l'équation : $2f(x) + 1 = 0$ , admet au moins une solution $\alpha\ dans\ \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$ .

4) Soit la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{f(\tan(x))}{\tan(x)} & si\ -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Justifier que g est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2} , 0\right[$ .

b) Vérifier que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} , 0\right[$ on a : $g(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ .

c) Déduire que g est continue à gauche en 0 .