Ces exercices d'arithmétique sont posés aux anciens examens Baccalauréat à l'étranger

## Exercice 1

1. (a) Déterminer un couple $(u, v)$ de nombres entiers relatifs tel que :
   $123u + 2003v = 1$
   (b) en déduire un entier relatif $k$ tel que $123k \equiv 1[2003]$
   (c) Démontrer que : $(\forall x \in \mathbb{Z})\ 123x \equiv 456\ [2003] \Leftrightarrow x \equiv 456k\ [2003]$
   (d) Déterminer l'ensemble des entiers $x$ tel que : $123x \equiv 456[2003]$
   (e) Montrer qu'il existe un unique entier naturel $n$ tel que $123n \equiv 456\ [2003]$ *et* $1 \leq n \leq 2002$.
2. Soit $a$ un entier naturel tel que $1 \leq a \leq 2002$
   (a) Déterminer $a \wedge 2003$
   (b) montrer qu'il existe un entier $p$ tel que $ap \equiv 1[2003]$
   (c) Montrer que :
   $(\forall b \in \mathbb{N})(\exists! x \in \mathbb{N})\ 0 \leq x \leq 2002$ *et* $ax \equiv b[2003]$.

## Exercice 2

On pose pour tout entier naturel $n$ : $B_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$.

1. Déterminer suivant les valeurs de $n$ les restes de la division euclidienne de $3^n$ par 13.

2. Déterminer les entiers $n$ pour lesquels on a : $B_n \equiv 0[13]$

## Exercice 3

1. Soit $n$ un entier naturel.
   (a) Montrer que si $n$ est impair alors : $n^2 \equiv 1[8]$
   (b) Montrer que si $n$ est pair alors : $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$
2. $a$, $b$ et $c$ sont trois entiers naturels impairs .
   (a) Montrer que : $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré parfait .
   (b) Montrer que :$2(ab+bc+ca) \equiv 6[8]$
   (on pourra remarquer que :$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$)
   (c) En déduire que : $2(ab+bc+ca)$ n'est pas un carré parfait.
   (d) Montrer que $ab+bc+ca$ n'est pas un carré parfait.

## Exercice 4

1. résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :$(E)$ $\quad 3x-2y=1$
2. Soit $n$ un entier naturel non nul .
   (a) Montrer que le couple $(14n+3, 21n+4)$ est une solution de l'équation $(E)$.
   (b) En déduire que : $(21n+4) \wedge (14n+3) = 1$
3. Soit $d$ le plus grand diviseur commun de $2n+1$ et $21n+4$.
   (a) Montrer que $d=1$ ou $d=13$.
   (b) Montrer que : $(n \equiv 6[13]) \Leftrightarrow (d=13)$
4. Pour tout entier naturel $n$ tel que $n \geq 2$ , on pose m $A = 21n^2-17n-4$ et $B = 28n^3-8n^2-17n-3$
   (a) Montrer que les entiers $A$ et $B$ sont divisibles par $n-1$ dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déterminer en fonction de $n$ le plus grand diviseur commun de $A$ et $B$.

## Exercice 5

On considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation : $(E)$ $x^2(x^2+7) = y(2x+y)$.
Soit $(x,y)$ un élément de $\mathbb{N}^{*2}$ et soit $\delta$ le plus grand diviseur commun de $x$ et $y$.On pose : $x=a\delta$ et $y=b\delta$.

1. On suppose que $(x,y)$ est une solution de $(E)$.
   (a) Verifier que :$a^2(\delta^2a^2+7) = b(2a+b)$
   (b) En déduire qu'il existe un entier naturel $k$ tel que : $2a+b=ka^2$ et $\delta^2a^2+7=kb$
   (c) Montrer que $a=1$
   (d) En déduire que : $(b+1)^2 = \delta^2+8$
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation $(E)$.

## Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-2001, 2\}$,on pose : $g(n) = \frac{n+2001}{n-2}$

1. (a) Montrer que :$(n-2) \wedge (n+2001) = (n-2) \wedge 2003$
   (b) Verifier que 2003 est un nombre premier .
   (c) En déduire les valeurs possibles de $(n-2) \wedge (n+2001)$.
   (d) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs $n$ tel que $(n-2) \wedge (n+2001) = 2003$
2. Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $g(n) \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $p \neq q$ et $p \wedge q = 1$ .
   (a) Montrer que $q^2 \wedge (p^2-q^2) = 1$
   (b) Montrer que : $g(n) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow n = 2 + \frac{2003q^2}{p^2-q^2}$
   (c) Déterminer $p$ , $q$ et $n$ pour que : $g(n) = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ et $p \wedge q = 1$

## Exercice 7

Soit $n$ un entier naturel tel que $n > 3$ .On pose : $A = n^3+3n^2+2n-4$ , $B = n^2+2n-1$ et $C = n-3$.

1. Déterminer l'entier $x_n$ tel que :$A = Bx_n + C$
2. Montrer que $A \wedge B = C \wedge 14$
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \wedge B = 7$

4. Déterminer les entiers naturels $n$ pour lesquels on a : $A \wedge B = 1$.

**Exercice 8**

Pour tout entier naturel $n$ tel que $n \geq 5$ , on pose : $x = n^3 - n^2 - 12n$ et $y = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Montrer que $(n-4)|x$ et $(n-4)|y$
2. On pose $a = 2n+1$ et $b = n+3$
   (a) Trouver une relation entre $a$ et $b$ indépendante de $n$.
   (b) Montrer que : $(a \wedge b)|5$
   (c) Montrer que : $5|a$ et $5|b \Leftrightarrow 5|n-2$
3. Montrer que : $(2n+1) \wedge n = 1$
4. (a) Déterminer $x \wedge y$.(On discutera suivant $n$ )
   (b) Etudier les cas respectifs : $n = 11$ ; $n = 12$.

**Exercice 9**

Soit $n$ un entier naturel premier.On considère l'équation : $(E) \quad (x,y) \in \mathbb{N}^{*2} \quad x^3 - y^3 = n$.

1. (a) Montrer que si $(x_0, y_0)$ est une solution de $(E)$ alors : $\begin{cases} x_0 - y_0 = 1 \\ x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 = n \\ 3x_0y_0 = n-1 \end{cases}$
   (b) Montrer que si $n \neq 3k+1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors l'equation $(E)$ n'admet aucune solution.
   (c) Montrer que si l'equation $(E)$ admet une solution alors elle est unique.
2. Montrer que si le système $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3xy = n-1 \end{cases}$ admet une solution alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4n - 1 = 3(2k+1)^2$

**Exercice 10**

Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls tel que $a^2$ divise $2b^2$.On pose :$a \wedge b = d$ et $a = da'$ et $b = db'$.

1. Montrer que $a'^2 \wedge b'^2 = 1$
2. Montrer que $a'^2$ divise $2b'^2$ et déduire que $a' = 1$ et que $a|b$.
3. Soient $x$ ,$y$ et $n$ des entiers naturels non nuls tels que : $(x-2n)(y-2n) = 2n^2$ ;on pose : $\delta = x \wedge y$ et $d = (x-2n) \wedge (y-2n)$.
   (a) Montrer que $d|n$ puis que : $d|\delta$.
   (b) Montrer que $x^2 + y^2 = (x+y-2n)^2$
   (c) Montrer que $\delta|d$ et déduire que : $x \wedge y = (x-2n) \wedge (y-2n)$

**Exercice 11**

Soit $p$ un entier naturel premier tel que : $p \geq 7$.

1. Montrer que : $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv -1[3]$.
2. En déduire que $3|p^4 - 1$
3. Montrer qu'i existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p^2 - 1 = 4k(k+1)$ (on pourra remarquer que $p$ est impair) et montrer que $16|p^4 - 1$.
4. Montrer que :$5|p^4 - 1$
5. (a) Soient $a$,$b$ et $c$ des entiers naturels non nuls.Montrer que : $a|c$ et $b|c$ et $a \wedge b = 1 \Rightarrow ab|c$
   (b) En déduire que : $240|p^4 - 1$

**Exercice 12**

On considère les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ définies par : $x_0 = 3$ *et* $y_0 = 1$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})$ et $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n = 2^{n+1} + 1$
2. Calculer $x_8 \wedge x_9$ et $x_{2002} \wedge x_{2003}$
3. Est ce que $x_n$ et $x_{n+1}$ sont premiers entre eux ?
4. Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $2x_n - y_n = 5$ et en déduire $y_n$ en fonction de $n$ .
5. Déterminer suivant les valeurs de $p$ le reste de la division euclidienne de $2^p$ par 5 pour $p \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})$ $x_n \wedge y_n = 1$ *ou* $x_n \wedge y_n = 5$
7. on a :$x_n \wedge y_n = 5$

**Exercice 13**

Soit $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ ;On pose : $A = n^2-2n+2$ ; $B = n^2+2n+2$ et on note : $d = A \wedge B$.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que pour tout entier non nul $x$ on a : $x|A$ *et* $x|n \Rightarrow x|2$
3. Montrer que pour tout entier non nul $x$ on a : $x|A$ *et* $x|B \Rightarrow x|4n$
4. On suppose que $n$ est impair .
   (a) Montrer que $A$ et $B$ sont impairs puis que $d$ est impair
   (b) Montrer que $d|n$
   (c) En déduire que $d|2$ et que $A \wedge B = 1$
5. On suppose que $n$ est pair .
   (a) Montrer que 4 ne divise pas $A$
   (b) Montrer que $d$ s'écrit sous la forme : $d = 2p$ avec $p$ impair.
   (c) Montrer que $p|n$ et en déduire que $d = 2$

**Exercice 14**

1. Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})\ (n+3)|(3n^3 - 11n + 48)$
2. Montrer que pour tout entier $n$ tel que $n \geq 2$ on a : $3n^2 - 9n + 16 \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $bc \neq a$ , on a : $a \wedge b = (bc - a) \wedge b$.
4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})(3n^3 - 11n) \wedge (n+3) = 48 \wedge (n+3)$
5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels $n$ tel que :$\frac{3n^3-11n}{n+3} \in \mathbb{N}$

**Exercice 15**

Pour tout entier naturel non nul $n$ , on pose : $a_n = 4.10^n - 1$ ; $b_n = 2.10^n - 1$ ; $c_n = 2.10^n + 1$.

1. Calculer $a_3$,$b_3$ et $c_3$.
2. Montrer que : $3|a_n$ et $3|c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $b_n c_n = a_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la décomposition en facteurs premiers de $a_6$.
4. Montrer que : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ et en déduire que $b_n$ et $c_n$ sont premiers entre eux.
5. On considére l'équation : (1) $\quad b_3x + c_3y = 1$
   (a) Déterminer une solution particulière de l'équation (1) (on donne : 1999 est un nombre premier)
   (b) Résoudre l'équation (1).

**Exercice 16**

Soit $p$ un entier naturel premier tel que $p \geq 7$.

1. Montrer que : $p \equiv 1\ [3]$ *ou* $p \equiv -1\ [3]$
2. En déduire que : $3|p^4 - 1$
3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p^2 - 1 = 4k(k+1)$ et que $16|p^4 - 1$ .
4. Montrer que $5|p^4 - 1$.
5. (a) Montrer que :$(\forall(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}\ \ a|c$ *et* $b|c$ *et* $a \wedge b = 1 \Rightarrow ab|c$
   (b) En déduire que $240|p^4 - 1$

**Exercice 17**

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $17x - 7y = 1$
2. résoudre dans $\mathbb{Z}$ le systéme d'equations : $\begin{cases} x \equiv -2\ [7] \\ x \equiv 2\ [17] \end{cases}$
3. résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'equation : $x^2 \equiv 4[119]$

**Exercice 18**

On considére dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E)\quad 4x^2 - 9y^2 = 432$

1. (a) Montrer que si $(x, y)$ est une solution de l'équation $(E)$ alors $3|x$ et $2|y$
   (b) Montrer que si $(\alpha, \beta)$ est une solution de l'équation : $X^2 - Y^2 = 12$ alors $(3\alpha, 2\beta)$ est une solution de l'équation $(E)$.
2. (a) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $X^2 - Y^2 = 12$.

(b) En déduire les solutions de l'équation $(E)$

**Exercice 19**

1. On pose : $a = pn$ et $b = p(n-1)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$.Montrer que :$a \wedge b = a - b$ .
2. Montrer que si $a$ et $b$ sont deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $a \wedge b = a - b$ alors il existe deux entiers naturels $n$ et $p$ tels que : $a = pn$ et $b = p(n-1)$
3. Application : Soient $x$ et $y$ deux entiers naturels non nuls ,on considére : $a = 40x(3y+2)$ ; $b = 15x(8y+5)$ ; $c = 24x(5y+3)$.
   (a) Déterminer : $a \wedge b$ et $b \wedge c$.
   (b) Verifier que $x$ est le plus grand diviseur commun des nombres $a$,$b$ et $c$

**Exercice 20**

Soit $a$ un entier naturel tel que $a > 1$ et $p$ un nombre premier.

1. (a) Montrer que si $p$ est premier avec deux nombres entiers naturels respectifs $x$ et $y$ alors $p$ est premier avec leur produit $xy$
   (b) En déduire que si $p > a$ alors $p$ est premier avec $a!$
   (c) Situer les nombres premiers qui divisent $a!$.
2. Dans cette question ,on suppose que $p \leq a$ et on veut déterminer le plus grand entier naturel $\alpha$ tel que $p^\alpha$ divise $a!$.
   (a) Montrer que parmis les facteurs :$1; 2; 3; ...; a$ de $a!$, ceux qui sont divisibles par $p$ sont :$p, 2p, ..., qp$ avec $q$ le quotient de la division euclidienne de $a$ par $p$.
   (b) Verifier que le produit de ces derniers vaut $\gamma = (q!)p^q$ et que $\gamma | (a!)$.
   (c) Montrer que si $p > q$ alors $\alpha = q$ puis que si $p \leq q$ et si $q_1$ est le quotient de la division euclidienne de $q$ par $p$ alors $p^{q+q_1}$ divise $a!$
3. On prends $a = 156$ et $p = 5$.En appliquant les résultats de la question précédente un nombre de fois déterminer le plus grand entier naturel $\alpha$ tel que $5^\alpha$ divise $(156!)$

**Exercice 21**

On considére deux nombres entiers naturels non nuls $a$ et $b$ tels que :$\begin{cases} a^2 + b^2 = 625 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

1. Montrer que l'un des nombres $a$ et $b$ est pair et l'autre impair .
2. On suppose que $a$ est pair
   (a) Montrer que $(25 - a) \wedge (25 + a) = 1$
   (b) Montrer qu'il existe deux entiers naturels impairs $m$ et $n$ tels que : $25 + a = m^2$ et $25 - a = n^2$ et $m \wedge n = 1$
3. Déterminer les nombres $a$ et $b$
4. Déduire de ce qui précéde les solutions de l'equation : $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2} \quad x^2 + y^2 = 625$

**Exercice 22**

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers relatifs.

1. (a) Montrer que tout diviseur commun de $a - b$ et $a^2 - ab + b^2$ est un diviseur commun de $a^2$ et $b^2$.
   (b) En déduire que si les nombres $a$ et $b$ sont premiers entre eux alors les nombres $a - b$ et$a^2 - ab + b^2$ sont premiers entre eux.
2. (a) Trouver $a$ et $b$ tel que $a$ et $b$ sont premiers entre eux et $13(a - b) = 4(a^2 - ab + b^2)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'equation $13(a-b) = 4(a^2 - ab + b^2)$

**Exercice 23**

$x_1$,$x_2$,$x_3$,$y_1$,$y_2$,$y_3$ sont des nombres entiers naturels non nuls tels que : $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = M$.On pose :

$$d_x = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \; et \; d_y = (y_1 \wedge y_2 \wedge y_3)$$

et

$$m_x = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \text{ et } m_y = (y_1 \vee y_2 \vee y_3)$$

1. Montrer que $M$ est un multiple de chacun des entiers : $d_x, d_y, m_x$ *et* $m_y$.
2. On pose : $M = d_x M'$
   (a) Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls $x'_1$ , $x'_2$ et $x'_3$ premiers entre eux dans leur ensemble et vérifiant : $M' = x'_1 y_1 = x'_2 y_2 = x'_3 y_3$
   (b) En déduire que $M'$ est un multiple de $m_y$.
3. On pose $M' = m_y M''$.Soient $z_1$ , $z_2$ *et* $z_3$ les entiers naturels tels que : $m_y = z_1 y_1 = z_2 y_2 = z_3 y_3$
   (a) Montrer que : $x'_1 = z_1 M''$ *et* $x'_2 = z_2 M''$ *et* $x'_3 = z_3 M''$
   (b) Montrer que $M'' = 1$ et que $M = d_x m_y$.
4. Montrer que :

$$m_x = \frac{x_1 x_2 x_3}{(x_2 x_3) \wedge (x_3 x_1) \wedge (x_1 x_2)}$$

et

$$d_x = \frac{x_1 x_2 x_3}{(x_2 x_3) \vee (x_3 x_1) \vee (x_1 x_2)}$$

(on pourra prendre : $y_1 = x_2 x_3$ ; $y_2 = x_3 x_1$ ; $y_3 = x_1 x_2$ )

## Exercice 24

Soit $k \in \mathbb{Z}$tel que $k \neq -3$.

1. Montrer que les deux nombres $k + 3$ et $2k^2 + 5k - 2$ sont premiers entre eux.
2. Discuter suivant les valeurs de $k$ la valeur du plus grand diviseur commun des deux nombres $k + 3$ et $4k^2 + 11k + 4$.
3. On considére le nombre $A = \frac{(4k^2+11k+4)(2k^2+5k-2)}{k+3}$.Pour quelles valeurs de $k$ le nombre $A$ est - il un nombre entier relatif ?

## Exercice 25

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels tels que : $0 < b < a$ et $b^2$ est divisible par $a$.

1. Soit $d$ le plus grand diviseur commun des deux nombres $a$ et $b$.On pose : $a = da_1$ et $b = db_1$.
   (a) Montrer que les deux nombre $a_1$ et $b^2$ sont premiers entre eux.
   (b) Montrer que le nombre $a_1$ divise le nombre $d$ et que le nombre $a_1^2$ divise le nombre $a$.
2. On écrit le nombre $a$ sous la forme : $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ tel que les nombres $p_i$ pour $1 \leq i \leq n$ sont premiers et différents deux à deux et les nombres $\alpha_i$ pour $1 \leq i \leq n$ sont des entiers naturels non nuls.
   (a) Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on a : $p_i | b$.
   (b) Montrer que le nombre $b$ admet une écriture sous la forme : $(b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_n^{\beta_n})c$ avec ,pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ ,$\beta_i$ est un entier naturel vérifiant : $\alpha_i \leq 2\beta_i$ et $a \wedge c = 1$. les

## Exercice 26

1. $a$,$b$ et $k$ sont des entiers relatifs tel que : $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$.Montrer que si $a \neq bk$ alors : $a \wedge b = b \wedge (a - bk)$.
2. Soit $n$ un entier naturel non nul tel que $n \geq 4$.On pose : $A = n^2 - n - 10$ *et* $B = n + 4$.
   (a) Montrer que : $A \wedge B = B \wedge 10$
   (b) Determiner les valeurs de $n$ pour lesquelles $B | A$.
   (c) On pose : $A' = \frac{A}{A \wedge B}$ *et* $B' = \frac{B}{A \wedge B}$
      i. Montrer que

      $$(A \wedge B = 5 \text{ et } A \vee B = 300) \Leftrightarrow A'B' = 60 \text{ et } B' \text{est impair}$$

      ii. En déduire le nombre entier naturel $n$ pour lequel on a : $A \wedge B = 5$ *et* $A \vee B = 300$

## Exercice 27

1. Montrer que pour tout nombre entier naturel $a$ et pour tout nombre entier naturel impair $m$ on a : $(a+1) | a^m + 1$.

2. Soit $q$ un entier naturel premier et $a \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que : $(a+1)^q \equiv a^q + 1\ [q]$
   (b) En déduire que $a^q \equiv a\ [q]$
3. Pour tout entier naturel $n$ tel que $n > 1$ on pose : $a_n = (n!)^2 + 1$
   (a) Montrer que $a_n$ est impair.
   (b) Montrer que $a_n$ admet un diviseur premier $p$ tel que $p > n$.
   (c) On suppose que $p$ s'écrit sous la forme (1) : $p = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.Montrer que le nombre $1 + (n!)^{2(2k+1)}$ est divisible par $a_n$ et que $p$ divise $n! + (n!)^p$.(On pourra remarquer que : $p - 1 = 2(2k+1)$
   (d) En déduire que le nombre $p$ ne peut s'écrire sous la forme (1) ci-dessus .
4. Déduire de ce quii précéde qu'il y'a une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.