Lycée Cité El Amal	Devoir de Contrôle N : 1	Mr : Ftirich
Gabès	Mathématiques	Classe 4 Tec

Exercice 1 : (4)

Pour chaque question répondre par vrai ou faux **en justifiant votre réponse**

1) Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 2$ alors $\left|z - \frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{2}$.

2) $\left|\mathbf{1 + e^{2i\frac{\pi}{3}}}\right| = \sqrt{\mathbf{2}}$

3) Soit, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ alors la forme exponentielle de $z = 1 - e^{i\theta}$ est $z = -2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

4) Soit la fonction f définie sur IR* par $f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$ alors $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

5) Soit la fonction f définie sur$[1, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ alors la fonction $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [1, +\infty[$

Exercice 2 : (6)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$

Soit A , B et C troix points d'affixes $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 2i$ et $z_C = z_A + z_B$

1) .a) Ecrire z_A sous la forme exponentielle

b) Placer B et construire A

2) a) Montrer que OACB est un losange. Puis placer le point C

b) Calculer l'aire de OACB

3) Soit Γ le cercle de centre A et passant par O et D le point d'affixe $z_D = 2i\sqrt{3}$

a) Montrer que $D \in \Gamma$

b) Placer le point D . justifier votre réponse

4) Soit l'application $f : P \longrightarrow P$

$$M(z) \longrightarrow M'(z') \text{ tel que } z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$$

a) Déterminer l'affixe du point D′ image de D par f

b) Montrer que ODD′ est un triangle isocèle

c) Montrer que C, D et D′ sont alignés

d) En déduire une construction du point D′.

Exercice 3 : (5 ,5)

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1+\sqrt{x}\cos(x)}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1}-1)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0

2) **a)** Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

b) Calculer alors $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

3) **a)** Calculer $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\mapsto-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{4}x\right]$

b) Interpréter graphiquement le résultat

4) **a)** Montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

b.) Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha - 1}$

Exercice 4 : (4, 5)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et z un nombre complexe non nul

M et M'd'affixes respectives z et z' tel que $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$

Montrer que les points O, M et M'sont alignés

1) Montrer que $\overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z - 1)$

2) Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et (-1). On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon OA et $M\ (z)$ un point de (C)

a) Vérifier que $|z - 1| = 1$

b) Montrer que $|z' + 1| = |z'|$ et interpréter géométriquement cette égalité

c) Déduire de ce qui précède une construction géométriquement du point M' à partir de M

3) On suppose que $z \neq 1$ et $M1$ le symétrique de M par rapport à $(O, \vec{u})$

a) On pose $a = \frac{z'+1}{z'-1}$. Exprimer a en fonction de $\bar{z}$

b) Donner une interprétation géométrique de $\mathrm{Arg}(a)$